

Astronomisch Compendium

W.J. van der Star

Inhoudsopgave

1. Hemelmechanica	1
2. Astrofysica	7
3. Kosmologie	18

Hemelmecanica

Als een pm met massa m rond een lichaam met massa M beweegt, met $m \ll M$, dan geldt voor de grootte van de aantrekkende kracht F_g van M op m : $F_g = -\frac{GMm}{r^2}$

In componenten is dit te schrijven als:

$$F_x = F_g \cos(\phi) = -\frac{GMm}{r^3}x \wedge F_y = F_g \sin(\phi) = -\frac{GMm}{r^3}y$$

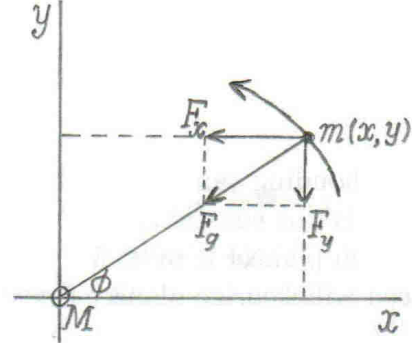
Tevens geldt $F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \wedge F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$

$$\text{Hieruit volgt: } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}x \wedge \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}y$$

Vermenigvuldiging van de 1-ste D.V. met $-y$ en de 2-de met x en optelling geeft:

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0 \rightarrow x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h$$

$$d \tan \phi = d \left(\frac{y}{x} \right) \Leftrightarrow \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} = \frac{r^2}{x^2} d\phi = \frac{sd y - y dx}{x^2} \Leftrightarrow r^2 \frac{d\phi}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \rightarrow$$



Tweede wet van Kepler:

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h$$

De voerstraal van de pm doorloopt dus dezelfde oppervlakte per tijdseenheid.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{GM}{h} \cdot \frac{d\phi}{dt} \cos \phi = -\frac{GM}{h} \cdot \frac{d(\sin \phi)}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{GM}{h} \sin \phi + K$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{GM}{h} \cdot \frac{d\phi}{dt} \sin \phi = \frac{GM}{h} \cdot \frac{d(\cos \phi)}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{GM}{h} \cos \phi + L$$

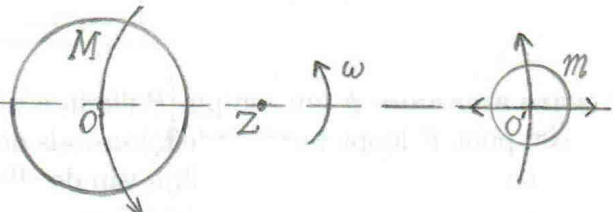
Substitutie in $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ met $N = \frac{GM}{h}$ geeft: $x(N \cos \phi + L) + y(N \sin \phi - K) - h \Leftrightarrow N(x \cos \phi + y \sin \phi) + xL - yK = h \Leftrightarrow N^2 r^2 = (h - Lx + Ky)^2 \Leftrightarrow (N^2 - L^2)x^2 + 2KLxy + (N^2 - K^2)y^2 + 2hLx - 2hKy - h^2 = 0 \rightarrow$

Eerste wet van Kepler: Een hemellichaam beschrijft een ellipsbaan met de zon in één van de brandpunten.

Als m niet te verwaarlozen is t.o.v. M , dan draaien beide lichamen om het gemeenschappelijk mmp Z . Als de afstand tussen de middelpunten O en O' van de lichamen d is, dan geldt:

$$ZO = md/(M+m) \text{ en } ZO' = Md/(M+m)$$

Als ω de hoeksnelheid is van beide lichamen rond Z , dan geldt voor de centripetale kracht F_c op m : $F_c = m\omega^2 Md/(M+m)$; deze wordt geleverd door de gravitatiekracht F_g :



$$F_g = \frac{GMm}{d^2} \rightarrow \frac{\omega^2 d}{M+m} = \frac{G}{d^2}$$

Substitutie van $\omega = 2\pi/T$, met T de omloopstijd van M en m rond Z , geeft de **Derde wet van Kepler**:

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

De verhouding van het kwadraat van de omloopstijd tot de derde macht van de afstand tot de zon is dus constant.

Voor een planeet is $m \ll M \rightarrow T^2/d^3 \approx 4\pi^2/GM$; hieruit volgt voor de aarde (met $T = T_a$) en een willekeurige planeet (met $T = T_p$):

$$T_p^2 d_a^3 = T_a^2 d_p^3$$

Daar voor de aarde $T_a = 1$ jaar en $d_a = 1$ A.E., volgt hieruit:

$$T_p^2 = d_p^3$$

Voor een satelliet S in een ellipsbaan rond de aarde geldt in het perigeum resp. apogeum: $\phi = 0 \rightarrow \cos \phi = 1 \rightarrow r_p = p/(1+e)$ resp. $\phi = \pi \rightarrow \cos \phi = -1 \rightarrow r_a = p/(1-e)$. Substitutie van $p = a(1 - e^2)$ geeft:

$$r_p = a(1 - e) \wedge r_a = a(1 + e)$$

Hieruit volgt: $a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$

Als R de gemiddelde aardstraal is en h de min. resp. H de max. hoogte van S boven het aardoppervlak, dan geldt: $r_p = R + h$ en $r_a = R + H$; substitutie in a geeft dan:

$$a = R + \frac{1}{2}(H + h)$$

Uit $\frac{r_p}{r_a} = \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{R + h}{R + H}$ volgt:

$$e = \frac{H - h}{H + h + 2R}$$

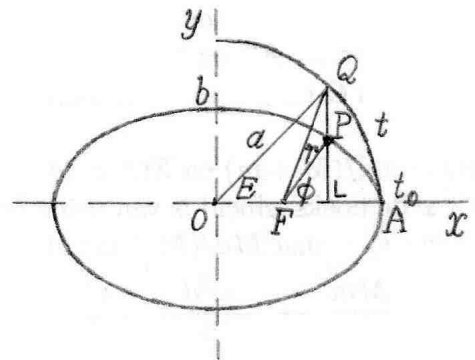
De **ware anomalie** ϕ van een pm P die in een ellipsbaan rond een punt F loopt wordt gedefinieerd als de hoek ϕ die de voerstraal r met de middellijn van de ellips maakt in de pos. X -richting.

De **excentrieke anomalie** E van P wordt gedefinieerd als de hoek E tussen OQ en FA , waarbij Q een punt van de cirkel is met middelpunt O en straal a en $PQ \perp FA$.

De **middelbare anomalie** M wordt gedefinieerd als:

$$M = 2\pi \frac{t - t_0}{T}$$

Hierin is T de omloopstijd van P .



$x_Q^2 + y_Q^2 = a^2$; substitutie van $x_P = x_Q$ en delen door a^2 geeft: $(x_P/a)^2 + (y_Q/a)^2 = 1$
 Uit $(x_P/a)^2 + (y_P/a)^2 = 1$ volgt dan: $y_P = y_Q(b/a) = y_Q\sqrt{1-e^2} \Leftrightarrow r \sin \phi = a \sin E \sqrt{1-e^2}$
 $FR = OR - OF = a \cos E - c = a \cos E - ae \Leftrightarrow r \cos \phi = a(\cos E - e)$
 Kwadrateren en optellen van beide uitdrukkingen en substitutie van $\sin^2 E = 1 - \cos^2 E$ geeft:

$$\cos \phi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \Leftrightarrow \cos E = \frac{e + \cos \phi}{1 + e \cos \phi}$$

$$\tan^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi} = \frac{1 - [(\cos E - e)/(1 - e \cos E)]}{1 + [(\cos E - e)/(1 - e \cos E)]} = \frac{[(1 + e)(1 - \cos E)]/(1 - e \cos E)}{[(1 - e)(1 + \cos E)]/(1 - e \cos E)} \Leftrightarrow$$

$$\tan^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{(1 + e)(1 \cos E)}{(1 - e)(1 + \cos E)} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{1}{2} E \rightarrow$$

$$\tan \frac{1}{2} \phi = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e} \tan \frac{1}{2} E}$$

$$Opp.FAQ = Opp.OAQ - Opp.OFQ = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}ae.a \sin E \rightarrow$$

$$Opp.FAP = (b/a).Opp.FAQ = \frac{1}{2}ab(E - e \sin E)$$

Uit de 2-de wet van Kepler volgt: $\frac{t - t_0}{T} = \frac{Opp.FPA}{Opp.ellips} = \frac{E - e \sin E}{2\pi}$ Substitutie van $M = 2\pi(t - t_0)/T$ geeft de

Vergelijking van Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Substitutie van $T = 2\pi\sqrt{a^3/GM}$ geeft:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(E - e \sin E)$$

Als de excentriciteit e klein is, dan is ook de term $e \sin E$ klein. In eerste benadering geldt dus: $E_1 = M$. Substitutie in M geeft dan de tweede benadering: $E_2 = M + e \sin M$, en substitutie van E_2 de derde benadering: $E_3 = M + e \sin(M + e \sin M) \Leftrightarrow$

$$E_3 = M + e \sin M \cos(e \sin M) + e \cos M \sin(e \sin M) \approx M + e \sin M + e^2 \sin M \cos M \Leftrightarrow$$

$$E_3 = M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M$$

Hieruit volgt voor de vierde benadering: $E_4 = M + e \sin E_3 \Leftrightarrow$

$$E_4 = M + e \sin(M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M)$$

Toepassing van de sinus somformule op de 1-ste en (2-de+3-de term) en van $\sin \alpha \approx \alpha$ en $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, en verwaarlozing van termen met e^3 en e^4 geeft:

$$E_4 \approx M + e\{\sin M(1 - \frac{1}{2}(e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M)^2) + \cos M(e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M)\} \Leftrightarrow$$

$$E_4 = M + e\{\sin M(1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 M) + e \sin M \cos M + \frac{1}{2}e^2 \cos M \sin 2M\} \Leftrightarrow E_4 = M + e\{\sin M - \frac{1}{2}e^2 \sin^3 M + \frac{1}{2}e \sin 2M + e^2 \sin M(1 - \sin^2 M)\} \Leftrightarrow$$

$$E_4 = M + e\{\sin M(1 + e^2) + \frac{1}{2}e \sin 2M - \frac{3}{2}e^2 \sin^3 M\}$$

$$\text{Stel: } \begin{cases} \cos M + i \sin M = p \\ \cos M - i \sin M = 1/p \end{cases} \rightarrow 2i \sin M = p - \frac{1}{p} \rightarrow -8i \sin^3 M = p^3 - \frac{1}{p^3} - 3\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

Toepassing van de stelling van De Moivre geeft:

$$-8i \sin^3 M = \cos 3M + i \sin 3M - \cos 3M + i \sin 3M - 3.2i \sin M = 2i \sin 3M - 6i \sin M \rightarrow$$

$$\sin^3 M = -\frac{1}{4} \sin 3M + \frac{3}{4} \sin M \rightarrow E_4 = M + e\left\{(1 - \frac{1}{8}e^2) \sin M + \frac{1}{2}e \sin 2M + \frac{3}{8}e^2 \sin 3M\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{E_4 = M + (e - \frac{1}{8}e^3) \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M}$$

Als ϵ het grondtal van de natuurlijke logaritme is, dan geldt: $\tan \frac{1}{2}\phi = \frac{1}{i} \cdot \frac{\epsilon^{i\phi} - 1}{\epsilon^{i\phi} + 1} \rightarrow$

$$\frac{\epsilon^{i\phi} - 1}{\epsilon^{i\phi} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\epsilon^{iE} - 1}{\epsilon^{iE} + 1}$$

Stel: $e = \sin \phi \rightarrow \sqrt{\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}} = \frac{1 + \tan \phi}{1 - \tan \phi} = \frac{1+x}{1-x} \Big| x = \tan \frac{1}{2}\phi \rightarrow$

$$\frac{\epsilon^{i\phi} - 1}{\epsilon^{i\phi} + 1} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{\epsilon^{iE} - 1}{\epsilon^{iE} + 1} \rightarrow \epsilon^{i\phi} = \frac{\epsilon^{iE} - x}{1 - x\epsilon^{iE}} = \frac{\epsilon^{iE}(1 - x\epsilon^{-iE})}{1 - x\epsilon^{iE}} \rightarrow$$

$$i\phi = iE + \ln(1 - x\epsilon^{-iE}) - \ln(1 - x\epsilon^{iE}) = iE - x\epsilon^{-iE} - \frac{1}{2}x^2\epsilon^{-2iE} - \dots + x\epsilon^{iE} + \frac{1}{2}x^2\epsilon^{2iE} + \dots \Leftrightarrow$$

$$i\phi = iE + x(\epsilon^{iE} - \epsilon^{-iE}) + \frac{1}{2}x^2(\epsilon^{2iE} - \epsilon^{-2iE}) + \dots = iE + x \cdot 2i \sin E + \frac{1}{2}x^2 \cdot 2i \sin 2E + \dots \rightarrow$$

$$\phi = E + 2(x \sin E + \frac{1}{2}x^2 \sin 2E + \frac{1}{3}x^3 \sin 3E + \dots)$$

$$x = \tan \frac{1}{2}\phi = \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} = \frac{1}{e} \{1 - (1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \dots)\} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \dots \rightarrow$$

$x^2 \approx \frac{1}{4}e^2$ en $x^3 \approx \frac{1}{8}e^3$; substitutie van x , x^2 en x^3 geeft:

$$\boxed{\phi = E + (e + \frac{1}{4}e^3) \sin E + \frac{1}{4}e^2 \sin 2E + \frac{1}{12}e^3 \sin 3E + \dots}$$

$$E_2 = E + M \sin M \rightarrow \sin 2E = \sin(2M + 2e \sin M) \Leftrightarrow$$

$$\sin 2E = \sin 2M \cos(2e \sin M) + \cos 2M \sin(2e \sin M) \approx \sin 2M + \cos 2M \cdot 2e \sin M$$

Substitutie van $\cos 2M = 1 - \sin^2 M$ en $\sin^3 M = \frac{1}{4}(3 \sin M - \sin 3M)$ geeft:

$$\sin 2E = -e \sin M + \sin 2M + e \sin 3M$$

Substitutie in ϕ van de uitdrukkingen voor E_4 , $\sin E_3$, $\sin 2E$ en van $\sin 3E = \sin 3M$ als eerste benadering voor $\sin 3E$, met verwaarlozing van 4-de en hogere machten van e , geeft de

Middelpuntsvergelijking:

$$\boxed{\phi = M + (2e - \frac{1}{4}e^3) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} \sin 3M}$$

Uit de vergelijking van Kepler volgt: $\frac{\partial M}{\partial e} = \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E - e \cos E \frac{\partial E}{\partial e} \rightarrow e \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E}$

Tevens geldt: $dM = dE - e \cos E dE = dE(1 - e \cos E) \rightarrow \frac{\partial E}{\partial e} dM = e \sin E dE \rightarrow$

$$e \int_0^M \frac{\partial E}{\partial e} dM = -e \cos E + C$$

Substitutie van $\frac{\partial E_4}{\partial e} \approx \frac{\partial E}{\partial e} = (1 - \frac{3}{8}e^2) \sin M + e \sin 2M + \frac{9}{8}e^2 \sin 3M$ geeft:

$$-e \cos E = C' - (e - \frac{3}{8}e^3) \cos M - \frac{1}{2}e^2 \cos 2M - \frac{9}{24}e^3 \cos 3M$$

Integratie van 0 naar 2π geeft: $-\int_0^{2\pi} e \cos E dM = C' \int_0^{2\pi} dM = 2\pi C' \rightarrow$

$$-\int_0^{2\pi} e \cos E dM = -\int_0^{2\pi} (e \cos E - e^2 \cos^2 E) dE = \pi e^2 \rightarrow C' = \frac{1}{2}e^2$$

Substitutie van $(r/a) - 1 = -e \cos E$ en C' geeft:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M - \frac{1}{2}e^2(\cos 2M - 1) - \frac{3}{8}e^3(\cos 3M - \cos M)$$

Voor de som van de kinetische - en potentiële energie per massa-eenheid van een satelliet in een ellipsbaan rond de aarde geldt: $\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = C$

Substitutie van $v = \frac{rv_t}{r'} = \frac{rv \cos \theta}{r'} = \frac{h}{r'}$ geeft:

$$\left(\frac{h}{r'}\right)^2 = \frac{2GM}{r} + C$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h \rightarrow \int_0^{2\pi} r^2 d\phi = \int_0^T dt = T \rightarrow 2\pi ab = hT = \frac{2\pi h}{\omega} \rightarrow$$

$$h^2 = \omega^2 a^2 b^2 = \omega^2 a^3 a(1 - e^2) = GMa(1 - e^2)$$

Substitutie van h^2 en $r_p = a(1 - e)$ als de satelliet in het perigeum is geeft:

$$\frac{GMa(1 - e^2)}{a^2(1 - e)^2} = \frac{2GM}{a(1 - e)} + C \rightarrow C = -\frac{GM}{a} \rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a} \rightarrow$$

Snelheid van een satelliet in een ellipsbaan rond de aarde:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Substitutie van $r = r_p = a(1 - e)$ resp. $r = r_a = a(1 + e)$ geeft de snelheid in het perigeum resp. apogeum:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \wedge v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$

Uit $a \rightarrow \infty$ volgt de **ontsnappingsnelheid** v_∞ :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Voor een komeet in een paraboolbaan rond de zon (massa M_z) g

$$r_p v_p = h \wedge v_p = \sqrt{\frac{2GM_z}{r_p}}$$

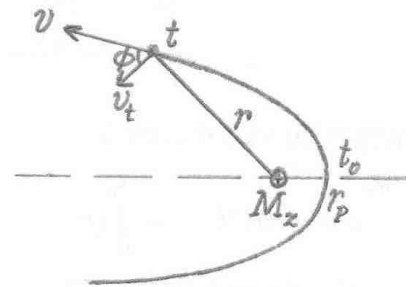
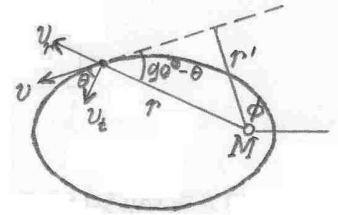
In poolcoördinaten geldt: $r = \frac{p}{1 + \cos \phi} \rightarrow$

$$\phi = 0 \Rightarrow r_p = \frac{1}{2}p \rightarrow h = \frac{1}{2}p \sqrt{\frac{4GM_z}{p}} = \sqrt{GM_z p} = r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

Substitutie van $r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\phi}$ geeft: $\frac{p^2 d\phi}{4 \cos^4 \frac{1}{2}\phi} = \sqrt{GM_z p} dt \rightarrow$

$$\int_0^\phi \frac{d\frac{1}{2}\phi}{\cos^4 \frac{1}{2}\phi} = 2\sqrt{\frac{GM_z}{p^3}} \int_{t_0}^t dt = 2\sqrt{\frac{GM_z}{p^3}} (t - t_0) \rightarrow$$

$$2\sqrt{\frac{GM_z}{p^3}} (t - t_0) = \tan \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2}\phi$$



Substitutie van $s = \tan \frac{1}{2}\phi$ en $q = 6\sqrt{\frac{GM_z}{p^3}}(t - t_0)$ geeft: $s^3 + 3s - q = 0 \rightarrow$

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + 1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + 1}}$$

Astrofysica

Als een ster een parallax heeft van p boogseconden, dan geldt voor de afstand r tot de aarde:

$$r = \frac{1}{p}$$

Hierin wordt r uitgedrukt in **parsec**, zijnde de afstand van een ster met een parallax van $1'' \approx 206.000 \text{A.E.}$

De **lichtsterkte** van een ster wordt gedefinieerd als de total hoeveelheid uitgestraalde energie per seconde.

De **monochromatische stralingsflux** πF_ν wordt gedefinieerd als de uitgaande energieflex bij een frequentie ν per m^2 .

Hieruit volgt voor een ster met straal R :

$$L = 4\pi R^2 \int_0^\infty \pi F_\nu d\nu$$

Als πf_ν de monochromatische stralingsflux is op een afstand r , dan geldt:

$$L = 4\pi r^2 \int_0^\infty \pi F_\nu d\nu$$

Uit $4\pi r^2 \int_0^\infty \pi f_\nu d\nu = 4\pi R^2 \int_0^\infty \pi F_\nu d\nu$ volgt dan:

$$f_\nu = \left(\frac{R}{r}\right)^2 F_\nu$$

Als b_1 resp. b_2 de schijnbare helderheid van een ster met **magnitude** m_1 resp. m_2 is, dan wordt de verhouding van b_1 en b_2 gedefinieerd als:

$$\frac{b_1}{b_2} = 100^{0,2(m_2 - m_1)} \approx 2,5^{m_2 - m_1}$$

Uit $\log(b_1/b_2) = (m_2 - m_1) \log 2,5$ volgt:

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log(b_1/b_2)$$

Als C een constante is die het nulpunt van de magnitudeschaal bepaalt, dan geldt voor elke ster met schijnbare helderheid b :

$$m = -2,5 \log b + C$$

Een **kleurindex** wordt gedefinieerd als het verschil van 2 magnituden voor verschillende magnitudeschalen.

De **absolute helderheid** B van een ster wordt gedefinieerd als de schijnbare helderheid van de ster als deze op een afstand van 10 parsec zou staan $\rightarrow B/b = (r/10)^2 = 1/(100p^2)$

De **absolute magnitude** M wordt nu gedefinieerd als:

$$M = -2,5 \log B$$

Voor de **afstandsmodulus** $m - M$ geldt dan: $m - M = -2,5 \log B + 2,5 \log b$

Substitutie van $B = b/(100p^2)$ geeft dan:

$$m - M = -5(\log p + 1)$$

De **absolute bolometrische magnitude** M_b wordt gedefinieerd als de absolute magnitude van een ster als alle door de ster uitgezonden straling de aarde zou bereiken.

De **bolometrische correctie** BC wordt gedefinieerd als:

$$BC = 2,5 \log \left\{ \frac{\text{ontvangen energiestroom}}{\text{gedetecteerde energiestroom}} \right\}$$

De absolute bolometrische magnitude is nu te schrijven als

$$M_b = M - BC$$

De **effectieve temperatuur** T_{eff} van een ster wordt gedefinieerd als de temperatuur die een ideaal zwart stralend lichaam met dezelfde oppervlakte zou moeten hebben om dezelfde hoeveelheid straling te produceren:

$$\int_0^{\infty} \pi F_{\nu} d\nu = \sigma T_{eff}^4$$

Voor de lichtsterkte van een ster volgt hieruit:

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_{eff}^4$$

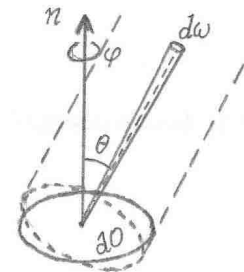
De **monochromatische intensiteit** $I_{\nu}(\theta, \varphi)$ wordt gedefinieerd als de energiestroom per sec. per frequentie-interval per eenheid van ruimtehoek met richting (θ, φ) door een eenheidsoppervlak loodrecht op deze richting.

Voor de **totale intensiteit** I geldt dus:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu}(\theta, \varphi) d\nu$$

Bij afwezigheid van absorptie is I_{ν} onafhankelijk van de afstand tot de stralingsbron. Voor de totale stralingsenergie met frequentie ν die per sec. door dO gaat geldt:

$$\pi F_{\nu} dO = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\nu}(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi dO$$



Hierin is $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ en wordt πF_ν pos. gerekend in de richting van de normaal \vec{n} . Voor een isotroop stralingsveld ($I_\nu(\theta, \varphi) = I_\nu$) is dus $\pi F_\nu = 0$.

Voor de **totale stralingsflux** πF geldt nu:

$$\pi F = \int_0^\infty \pi F_\nu d\nu$$

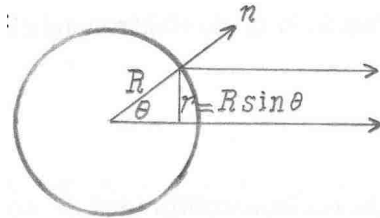
Als πF_ν^+ de naar buiten gerichte flux is en πF_ν^- de naar binnen gerichte flux, dan geldt: $\pi F_\nu = \pi F_\nu^+ + \pi F_\nu^- \rightarrow$

$$\pi F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} I_\nu(\theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad | \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

$$\pi F_\nu^- = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi I_\nu(\theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad | \quad \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \pi$$

Bij een bolvormige ster met straal R is i_ν alleen van θ afhankelijk: $I(\theta, \varphi) = I(\theta)$

Als J_ν de **gemiddelde intensiteit** is, zijnde de energiestroom met frequentie ν in de richting van een waarnemer W per m^2 , en πR^2 het oppervlak van de sterschijf, dan geldt voor de totale energiestroom die per sec. in de richting van W stroomt:



$$\pi R^2 J_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} I_\nu(\theta) \cos\theta R \sin\theta d\theta R d\varphi$$

Hierin is θ de hoek tussen de normaal \vec{n} van het steroppervlak en de uitgaande straling in de richting van W .

Vergelijking met πF_ν^+ geeft dan:

$$J_\nu = F_\nu^+$$

Voor de totale energieflex die een ster uitstraalt geldt:

$$L = 4\pi R^2 \pi F_\nu^+$$

De energieflex op een afstand r is dan:

$$\pi f_\nu = \frac{R^2}{r^2} \pi F_\nu^+$$

Elk element (m.u.v. waterstof) kent een aantal ionisatietrappen en binnen elke ionisatietrap een groot aantal aangeslagen toestanden. De verhouding van het aantal deeltjes per

volume-eenheid in niveau (r, s) tot het totaal aantal deeltjes per volume-eenheid in dezelfde ionisatietrap wordt gegeven door de **Wet van Boltzmann**:

$$\frac{n_{r,s}}{n_r} = \frac{g_{r,s}}{u_r} e^{-\chi_{r,s}/kT}$$

Hierin is $g_{r,s}$ een statistisch gewicht behorende bij energieniveau (r, s) die de mate van degeneratie van het niveau aangeeft, $\chi_{r,s} = E_{r,s} - E_{r,1}$ de aanslagenergie van niveau s binnen de ionisatietrap r , en $u_r = \sum_s g_{r,s} e^{-\chi_{r,s}/kT}$ de partitiefunctie voor ionisatietrap r .

De verhouding van het aantal deeltjes per volume-eenheid in ionisatietrap $r + 1$ t.o.v. die in trap r wordt gegeven door de **Wet van Saha**:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = 2 \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p_e} \cdot \frac{u_{r+1}}{u_r} e^{-\chi_r/kT}$$

Hierin is n_e de elektronendichtheid en p_e de **elektronendruk** waarvoor geldt:

$$p_e = n_e kT$$

De **emissiecoëfficiënt** j_ν wordt gedefinieerd als de hoeveelheid uitgezonden straling in het frequentie-interval $(\nu, \nu + d\nu)$ per sec., per volume-eenheid en per ruimtehoek. De hoeveelheid uitgezonden straling van een volume-element dV in tijd dt en binnen een ruimtehoek $d\omega$ is dan gelijk aan $j_\nu dt d\nu dV d\omega$. In alle richtingen en over het gehele frequentiespectrum zendt dV dan een energie uit van $4\pi dV \int_0^\infty j_\nu d\nu$.

Als een stralingsbundel met intensiteit i_ν loodrecht op een laagje materie met dikte ds valt, dan wordt de **absorptiecoëfficiënt** κ_ν gedefinieerd als de mate van verandering in I_ν t.g.v. de absorptie in ds : $dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu ds \rightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0) \exp\left\{-\int_0^s \kappa_\nu u ds\right\}$

De **optische diepte** τ_ν bij frequentie ν wordt gedefinieerd als:

$$\tau_\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu ds$$

Substitutie in $I_\nu(s)$ geeft dan:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu}$$

Als voor een laag $\tau_\nu \gg 1$, dan is die laag *optisch dik*, en als $\tau_\nu \ll 1$, *optisch dun*.

Als een bundel met intensiteit I_ν in een tijd dt binnen een ruimtehoek $d\omega$ rond de normaal op een schijf met oppervlakte dO en dikte ds valt, dan geldt voor de energie die op de schijf valt: $E_{\nu,i} = I_\nu d\omega dt d\nu dO$

Voor de uitgaande energie geldt: $E_{\nu,e} = (I_\nu + dI_\nu) d\omega dt d\nu dO$

De verandering in energie t.g.v. emissie en absorptie is dan:

$$dE_\nu = dI_\nu d\omega dt d\nu dO = j_\nu d\omega dt d\nu dO ds - I_\nu \kappa_\nu d\omega dt d\nu dO ds \rightarrow$$

Stralingstransportvergelijking:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \kappa_\nu + j_\nu$$

De **bronfunctie** S_ν wordt gedefinieerd als:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

Substitutie in $\frac{dI_\nu}{ds}$ geeft: $\frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu + S_\nu \rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu = S_\nu$

Als S_ν constant is, dan volgt hieruit:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S(1 - e^{-\tau_\nu})$$

De 1-ste term in het rechterlid is de verzwakking van $I_\nu(s)$ t.g.v. absorptie, de 2-de term de versterking t.g.v. emissie.

Bij thermodynamisch evenwicht geldt: absorptie=emissie \rightarrow

Wet van Kirchhoff:

$$j_\nu dO d\omega ds dv dt = \kappa_\nu B_\nu dO d\omega ds dv dt$$

Voor *lokaal thermodynamisch evenwicht* in een klein gebied van een ster geldt dan:

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$$

Er geldt dan dus: $D_\nu = B_\nu(T) \rightarrow$

$$I_\nu(s) - I_\nu(0) = [B_\nu(T) - I_\nu(0)](1 - e^{-\tau_\nu})$$

$B_\nu(T) > I_\nu(0) \Rightarrow$ de laag verschijnt in emissie t.o.v. de achtergrond

$B_\nu(T) < I_\nu(0) \Rightarrow$ de laag verschijnt in absorptie t.o.v. de achtergrond

Voor een ster met straal R en oppervlakte $S(R)$ geldt voor de massa $M(R)$ binnen een bolschil op afstand r en dikte dr van het middelpunt: $M(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \rightarrow$

Massa-incrementsvergelijking

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

De massa $M(r)$ veroorzaakt een gravitatieversnelling van $\frac{GM(r)}{r^2} \rightarrow$
 drukverandering: $-\frac{F}{m^2} = \frac{m}{m^2} \cdot \frac{GM(r)}{r^2} \Leftrightarrow -dp(r) = \rho(r) dr \frac{GM(r)}{r^2} \rightarrow$

Hydrostatische vergelijking:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Voor een ster als de zon is het gas als ideaal te beschouwen \rightarrow

Toestandsvergelijking:

$$p(r) = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

Hierin is m_H de massa van een waterstofatoom en μ het gemiddelde molecuulgewicht. (De stralingsdruk is m.u.v. zeer hete en zware sterren veel kleiner dan de gasdruk).

Als de gewichtsfractie van waterstof resp. helium resp. zwaardere elementen X resp. Y resp. Z is, dan geldt: $X + Y + Z = 1$

Als in de ster alle elementen geïoniseerd zijn, dan ontstaan uit 1 waterstofatoom 2 deeltjes, uit 1 heliumatoom 3 deeltjes en uit 1 zwaarder atoom ongeveer $\frac{1}{2}A$ deeltjes, met A het massagetal van het element. Het aantal waterstofatomen per volume-eenheid is dan $X\rho/m_H$. Ionisatie geeft dan $2X\rho/m_H$ deeltjes. Analoog ontstaan uit heliumatomen $3Y\rho/4m_H$ deeltjes en uit zwaardere atomen $\frac{1}{2}AZ\rho/Am_H = Z\rho/2m_H$ deeltjes per volume-eenheid \rightarrow

Totaal aantal deeltjes n per volume-eenheid: $n = (2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z)(\rho/m_H)$

Voor het gemiddelde molecuulgewicht uitgedrukt in m_H geldt dan:

$$\mu = \frac{\rho}{nm_H} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

Voor de gemiddelde temperatuur \bar{T} van een lichaam bestaande uit m_i massa's met temperatuur T_i geldt: $\bar{T} = \frac{1}{M} \sum_i m_i T_i \Big| M = \sum_i m_i \rightarrow \bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^M T dM$

Substitutie van $\rho(r) = \frac{p\mu m_H}{kT}$ in $dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ geeft: $dM = \frac{4\pi\mu m_H}{kT} p(r) r^2 dr \rightarrow$

$$\bar{T} = \frac{4\pi\mu m_H}{Mk} \int_0^R p(r) r^2 dr = \frac{4\pi\mu m_H}{Mk} \cdot -\frac{1}{3} \int_0^R \frac{dp(r)}{dr} r^3 dr$$

Substitutie van $\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$ en $dr = \frac{dM(r)}{4\pi r^2 \rho(r)}$ geeft:

$$\bar{T} = \frac{\mu G m_H}{3kM} \int_0^M \frac{M(r)}{r} dM(r)$$

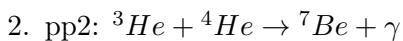
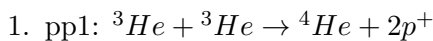
Een benedengrens volgt uit $r = R$: $\bar{T} > \frac{\mu G m_H M}{3kMR} \cdot \frac{1}{2} \int_0^M d\{M(r)\}^2 \rightarrow$

$$\bar{T} \geq \frac{\mu G m_H M}{6kR}$$

De voornaamste energiereacties in het inwendige van een ster zijn de **proton-protonketen** en de **CNO cyclus**; welke keten of cyclus voorkomt is afhankelijk van de temperatuur en de chemische samenstelling. Bij alle reacties komt uiteindelijk ongeveer 25 MeV vrij.

Proton-protonketen: ${}^1H + p^+ \rightarrow {}^2D + e^+ + \nu$, gevolgd door ${}^2D + p^+ \rightarrow {}^3He + \gamma$

Hierna zijn er 2 takken mogelijk:



Voor een ideaal adiabatisch expanderend gas geldt: $T' \propto p'^{(\gamma-1)/\gamma} \rightarrow$

$$\ln T' = \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln p' \rightarrow \frac{d \ln T'}{d \ln p'} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Daar $d \ln p' = d \ln p(r)$ en $d \ln T' > d \ln T(r)$, moet bij convectie voor de omgeving gelden:

$$\frac{d \ln T(r)}{d \ln p(r)} < \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Door de convectie wordt de temperatuursgradiënt kleiner, totdat dT/dr , dp/dr en $d\rho/dr$ stationair zijn geworden en er een **convectief evenwicht** is bereikt:

$$\frac{d \ln T(r)}{d \ln p(r)} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rightarrow \frac{1}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{1}{p(r)} \cdot \frac{dp(r)}{dr} \rightarrow$$

Convectief energietransportvergelijking:

$$\boxed{\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{T(r)}{p(r)} \cdot \frac{dp(r)}{dr}}$$

Als in een gaslaag energie door straling wordt getransporteerd, dan geldt: $dT/dr = (dT/dr)_{str}$; er zal dan convectie optreden als $(dT/dr)_{conv} > (dT/dr)_{str} \rightarrow$

Schwartzschildcriterium voor convectie:

$$\boxed{\left| \frac{dT}{dr} \right|_{conv} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{str}}$$

(Beide gradiënten zijn negatief). Aan dit criterium wordt voldaan als κ groot en/of T klein is ($|dT/dr|_{str}$ is groot), en als $(\gamma-1)/\gamma$ klein is ($|dT/dr|_{conv}$ is klein).

Met behulp van de toestandsvergelijking kan $\rho(r)$ uit de differentiaalvergelijkingen geëlimineerd worden. Voor een ster met straal R zijn de randvoorwaarden:

$$M(R) = M \wedge L(R) = L \wedge p(R) = 0 \wedge T(R) = T_{eff} \approx 0 \wedge M(0) = 0 \wedge L(0) = 0$$

Voor sterren in (quasi) hydrostatisch evenwicht (hoofdrekssterren) gelden de benaderingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \approx \frac{1}{2}R \wedge M(r) \approx \frac{1}{2}M \wedge \frac{dM(r)}{dr} \approx \frac{M}{R} \wedge \frac{dL(r)}{dr} \approx \frac{L}{R} \\ T(r) \approx \bar{T} \wedge p(r) \approx \bar{p} \wedge \rho(r) \approx \bar{\rho} \\ \rho \approx \frac{\bar{p}}{\bar{T}} \wedge \kappa(r) \approx \bar{\rho} \wedge \varepsilon(r) \approx \bar{\rho} \bar{T}^\nu \end{array} \right.$$

Hierin geldt $\nu = 5$ voor pp-ketens en $\nu = 12$ à 18 voor de CNO cyclus.

Substitutie in het stelsel differentiaalvergelijkingen geeft:

$$\frac{M}{R} \approx \bar{\rho} R^2 \wedge \frac{\bar{p}}{R} \approx \frac{M \bar{\rho}}{R^2} \wedge \frac{L}{R} \approx \bar{\rho}^2 R^2 \bar{T}^\nu \wedge \frac{\bar{T}}{R} \approx \frac{L \bar{\rho}}{R \bar{T}^3}$$

$$\text{Substitutie van } \rho \approx \frac{\bar{p}}{\bar{T}} \text{ in } \frac{\bar{p}}{R} \text{ geeft: } \bar{T} \approx \frac{M}{R} \rightarrow L \approx \frac{R \bar{T}^4}{\bar{\rho}} = \frac{M^4}{\bar{\rho} R^3} = \frac{M^4}{M} \rightarrow$$

Massa-lichtkrachtrelatie:

$$\boxed{L \propto M^3}$$

$$R^3 \approx \frac{L}{\bar{\rho}^2 \bar{T}^\nu} \rightarrow R \approx \frac{L^{1/3}}{\bar{\rho}^{2/3} \bar{T}^{\nu/3}} = \frac{M}{M^{2/3} \bar{T}^{\nu/3} R^{-2}} \rightarrow R \approx \frac{M^{2/3} \bar{T}^{\nu/3}}{M} = M^{-1/3} \frac{M^{\nu/3}}{R^{\nu/3}} \rightarrow$$

$$\boxed{R \approx M^{(\nu-1)/(\nu+3)}}$$

Stel: $\frac{\nu - 1}{\nu + 3} = 0,75 \rightarrow R \approx M^{3/4} \Leftrightarrow M \approx R^{4/3} \rightarrow$

$$L \propto R^4$$

Uit $L \propto R^2 T_{eff}^4 \propto L^{1/2} T_{eff}^4$ volgt dan:

$$L \propto T_{eff}^8$$

Een bolvormige waterstofwolk met straal R , massa M , temperatuur T en dichtheid ρ die uit $n = M/\mu$ deeltjes bestaat, heeft een thermische energie-inhoud van $E_{th} = \frac{3}{2}knT = \frac{3kMT}{2\mu m_H}$.

Als een bolschil met dikte dr op afstand r een massa van $4\pi r^2 \rho dr$ heeft en de massa $M(r)$ binnen de schil is $\frac{4}{3}\pi \rho r^3$, dan geldt voor de potentiële energie van de gaswolk:

$$E_p = - \int_0^R G \frac{Mm}{r} dr = - \int_0^R \frac{4\pi \rho G r^3}{3r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr = - \frac{16\pi^2 G \rho^2 R^5}{15} = - \frac{3GM^2}{5R}$$

Volgens de viriaalstelling geldt: $2E_{th} + E_p = 0 \rightarrow 2|E_{th}| < |E_p| \Rightarrow \text{collaps} \rightarrow \text{Gaswolk}$
collapst als geldt: $\frac{3kMT}{\mu m_H} < \frac{3GM^2}{5R} \rightarrow$

Kritische straal ofwel **Jeansstraal** R_k :

$$R_k = \frac{GM\mu m_H}{5kT}$$

Substitutie van R_k in $M = \frac{4}{3}\pi \rho R_k^3$ geeft de **kritische massa** ofwel **Jeansmassa** M_k :

$$M_k = \left\{ \frac{375}{4\pi} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{k}{G\mu m_H} \right\}^{3/2} \frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2}}$$

Daar tijdens het contraheren potentiële energie in thermische energie wordt omgezet, zal de contractie alleen door blijven gaan als er warmte wordt afgevoerd; anders ontstaat er na verloop van tijd een evenwichtstoestand. De afkoeling geschiedt d.m.v. dissociatie van vnl. waterstofmoleculen, waarbij infraroodstraling vrijkomt. Daar de dichtheid groter wordt zal de gaswolk op een gegeven moment ondoorzichtig worden voor de eigen infraroodstraling. de temperatuur zal dan gaan oplopen en er ontstaat een **protoster**.

Voor een gaswolk die in vrije val ineens stort geldt voor de verandering in de straal in een tijdsinterval t : $\Delta R = \frac{1}{2}gt^2 \mid g = -GM/R^2$

Als R de totale verandering in ΔR is, dan volgt hieruit voor de tijdsduur:

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho}} \rightarrow$$

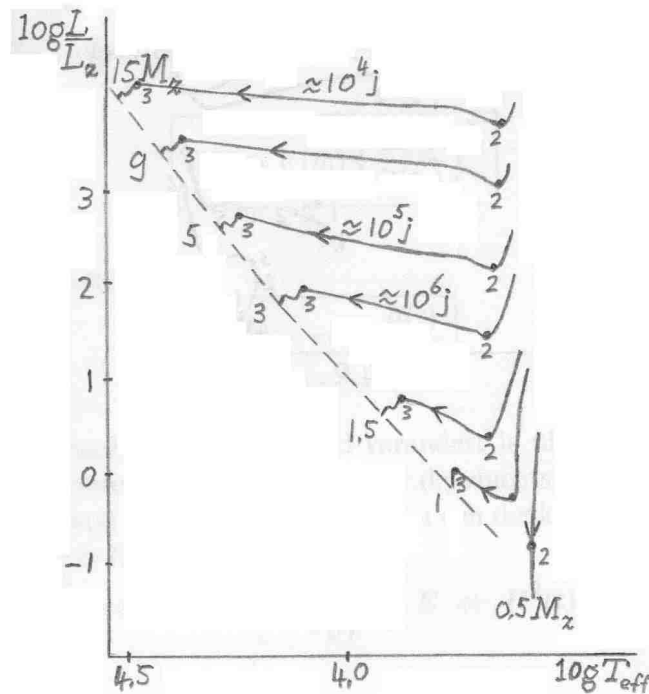
$$t \propto \frac{M_k}{T^{3/2}}$$

Aan het begin van de protosterfase is de wolk geheel ondoorzichtig voor de eigen straling, zodat alleen het oppervlak straalt volgens $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \mid T_{eff} = T_{opp} \approx 3000\text{K}$. De energie in de protoster wordt geheel via convectie getransporteerd; dit is de **Hayashifase**. Daar de contractie van de protoster langzaam verloopt verkeert deze in quasi hydrostatisch evenwicht

en geldt de viriaalstelling. De totale energie van een protoster bestaande uit een ideaal 1-atomig gas is dan: $E_{tot} = E_{th} + E_p = -\frac{1}{2}E_p + E_p = \frac{1}{2}E_p$

Als de temperatuur is opgelopen tot ongeveer 10^5 K, dan gaat het convectief energietransport over in stralingstransport. Tijdens deze fase gaat de protoster door met krimpen, maar gaat ook de oppervlaktetemperatuur omhoog.

Zowel lichte als zware sterren volgen tot aan de hoofdreeks ongeveer hetzelfde evolutiespoor. Tijdens de Hayashifase krimpt de ster waarbij T_{eff} ongeveer gelijk blijft en L afneemt. Bij punt (2) begint de stralingscontractefase, waarbij T_{eff} stijgt en L ongeveer gelijk blijft. Bij punt (3) start de waterstoffusie en is de ster op de hoofdreeks aanbeland.



Het spoor na de hoofdreeks wordt bepaald door de massa.

I. $M \leq 2,4M_{zon}$

1 \rightarrow 2: waterstof fuseert tot helium

2 \rightarrow 3: He -kern krimpt waardoor T stijgt; H -fusie in schil

3 \rightarrow 6: ster zet uit tot een **rode reus**; He -kern gedegenereerd

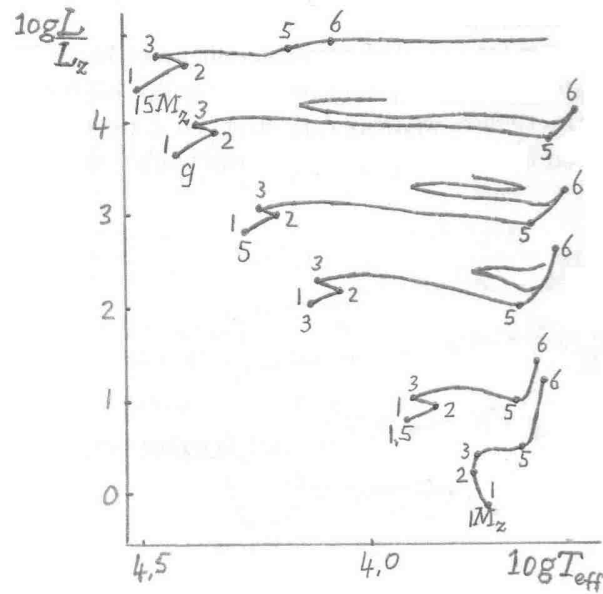
5 \rightarrow 6: L stijgt t.g.v. de uitzetting

6: heliumfase, T stijgt explosief: **heliumflits**. De druk blijft eerst constant, maar stijgt daarna waardoor de buitenste gaslagen worden weggeblazen, waarna er een nieuw evenwicht ontstaat waarbij helium in de kern tot koolstof fuseert met waterstoffusie in een schil hierom heen. Aan het eind van de heliumfusie krimpt de kern verder in, maar de massa is te klein om T hoog genoeg te laten oplopen voor verdere kernfusie. Er blijft een koolstofkern achter met $\rho \approx 10^8$ à 10^{11} kg/m³. De weggeblazen buitenste gaslagen vormen een zgn. **planetaire nevel** en de ster is een **witte dwerg** geworden die langzaam uitdooft.

II. $M > 2,4M_{zon}$

Het begin is vergelijkbaar met I., waarbij sterren van 5 à $9M_{zon}$ in punt 5 **rode superreuzen** zijn en sterren met meer dan $9M_{zon}$ **blauw witte superreuzen** (met een niet gedegenereerde heliumkern). Echter, i.t.t. lichtere sterren loopt T nu wel hoog genoeg op om helium te

fuseren, en vervolgens in steeds snellere fasen (daar elk volgens fusieproces minder energie per deeltje oplevert) zwaardere elementen totdat de kern (voor sterren met $M > 12M_{zon}$) geheel uit ijzer bestaat. De kern krimpt verder totdat bij $T > 10^9\text{K}$ het ijzer uiteenvalt in vnl. alphadeeltjes en neutronen. Dit kost echter energie waardoor de kern snel afkoelt en de ster explodeert als een **supernova**. Het restant is een **neutronenster** of eventueel een **zwart gat**.



Kosmologie

De **roodverschuiving** z wordt gedefinieerd als:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{v}{c} \Big| v \ll c$$

Daar het heelal expandeert neemt de afstand tussen 2 willekeurige punten A en B in de ruimte constant toe. Als op tijd t_0 de afstand tot A $r(t_0)_A$ is en tot B $r(t_0)_B$, en op tijd t $r(t)_A$ resp. $r(t)_B$, dan geldt: $r(t)_A/r(t_0)_A = r(t)_B/r(t_0)_B$

Stel: $D(t) = R(t)d$, met $D(t)$ de afstand, $R(t)$ de zgn. **schaalfactor** en d een constante, de zgn. meebewegende afstand \rightarrow

$$v(t) = \frac{dD(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt}d = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}R(t)d = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}D(t)$$

De **Hubbleconstante** $H(t)$ wordt nu gedefinieerd als:

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

Hieruit volgt de **Wet van Hubble**:

$$v(t) = H(t)D(t)$$

De Hubbleconstante is dus in feite niet echt constant; momenteel is $H \approx 75 \pm 25 \text{ km/s,MPc}$. Voor het volume $V(t)$ van een kubus met zijden D_1 , D_2 en D_3 geldt:

$$V(t) = D_1 D_2 D_3 = R^3(t)d_1 d_2 d_3 \rightarrow V(t_0) = R^3(t_0)d_1 d_2 d_3 \rightarrow \frac{V(t)}{V(t_0)} = \frac{R^3(t)}{R^3(t_0)} \rightarrow$$

$$V(t) = V(t_0) \left\{ \frac{R(t)}{R(t_0)} \right\}^3$$

Voor afstanden volgt hieruit:

$$r(t) = r(t_0) \frac{R(t)}{R(t_0)}$$

De manier waarop de schaalfactor met de tijd verandert is uit de ART af te leiden, maar tevens op een klassieke, Newtoniaanse wijze. Voor de vluchtsnelheid van een sterrenstelsel met massa m op afstand $r(t)$ van het middelpunt van een denkbeeldige bol met massa M en dichtheid $\rho(t)$ geldt: $v(t) = H(t)r(t)$

$$\text{Er geldt nu: } E_k + E_p = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r(t)} = E \Leftrightarrow H^2(t)r^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)r^2(t) = \frac{2E}{m}$$

Substitutie van $r(t) = r(t_0)\{R(t)/R(t_0)\}$ geeft dan de

Friedmannvergelijking:

$$H^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho(t) - \frac{k}{R^2(t)}$$

Hierin is $k = \frac{2ER_0^2}{mr_0^2}$, waarvan het teken het verloop van de evolutie van het heelal bepaalt:

$k < 0 (E > 0) \Rightarrow$ open heelal, expansie gaat altijd door.

$k = 0 (E = 0) \Rightarrow$ vlak heelal, expansie stopt na een oneindige tijd.

$k > 0 (E < 0) \Rightarrow$ gesloten heelal, expansie stopt na een eindige tijd.

Bij geschikte eenheden komen de waarden van k overeen met resp. $-1, 0$ en 1 .

De Friedmannvergelijking is te schrijven als: $\frac{8\pi G \varrho(t)}{3H^2(t)} - 1 = \frac{k}{H^2(t)R^2(t)}$

Hieruit volgt dat een vlak heelal alleen mogelijk is bij de zgn. **kritische dichtheid** $\varrho_c(t)$ waarvoor geldt:

$$\varrho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

De **Omega-parameter** Ω wordt gedefinieerd als:

$$\Omega = \frac{\varrho(t)}{\varrho_c(t)}$$

Uit de Friedmannvergelijking volgt dan:

$$\Omega = 1 + \frac{k}{H^2(t)R^2(t)}$$

Hieruit volgt voor de verschillende heelalmodellen:

$$\Omega = \begin{cases} < 1 & | k < 0 \text{ open heelal} \\ = 1 & | k = 0 \text{ vlak heelal} \\ > 1 & | k > 0 \text{ gesloten heelal} \end{cases}$$

Voor een vlak heelal geldt: $\frac{1}{R^2(t)} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \varrho(t) = \frac{8}{3}\pi G \varrho(t_0) \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^n$

Stel: $\frac{R(t)}{R(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\alpha \rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{R(t_0)}{t_0^\alpha} \alpha t^{\alpha-1} \wedge \frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R(t_0)} \left(\frac{t_0}{t} \right)^\alpha \rightarrow$

$H(t) = \frac{\alpha}{t} = H(t_0) \frac{t_0}{t} \Big| H(t_0) = \frac{\alpha}{t_0} \rightarrow H^2(t_0) \frac{t_0^2}{t^2} = \frac{8}{3}\pi G \varrho(t_0) \left(\frac{t_0}{t} \right)^{n\alpha} \Big| n = 3, 4 \rightarrow$

$\varrho(t_0) = \frac{3H^2(t_0)}{8\pi G} \wedge \alpha = \frac{2}{n} \rightarrow$

$$R(t) = \begin{cases} R(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} & \text{stofgedomineerd heelal} \\ R(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} & \text{stralingsgedomineerd heelal} \end{cases}$$

Uit $H(t) = \frac{\alpha}{t}$ volgt voor de **Hubbletijd** $t_H = \frac{2}{3H}$ (stofged.) of $t_H = \frac{1}{2H}$ (stralingsged.)

$|\Omega - 1| = \frac{k}{H^2(t)R^2(t)} \approx \frac{kt^2}{R^2(t)} \rightarrow |\Omega_0 - 1| = \frac{kt_0^2}{R^2(t_0)} \rightarrow |\Omega - 1| = |\Omega_0 - 1| \frac{R^2(t_0)t^2}{R^2(t)t_0^2}$

$$R(t) \propto t^\alpha \rightarrow |\Omega - 1| \propto t^{2-2\alpha} \propto R(t)^{2(\alpha^{-1}-1)}$$

De afwijking van de vlakheid van het heelal wordt dus groter naarmate het heelal verder expandeert.

Een leeg heelal ($\rho(t) = 0$) heeft energie in de vorm van vacuümenergie die onafhankelijk van de schaalfactor is en die bepaald wordt door de **kosmologische constante** Λ waarvoor geldt:

$$\Lambda = 8\pi G \rho_{vac} = \frac{8\pi G \varepsilon_{vac}}{c^2}$$

De Friedmannvergelijking is dan te schrijven als:

$$H^2(t) = \frac{8}{3}\pi G \rho(t) + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R^2(t)}$$

Voor een leeg, vlak heelal, het zgn. **De Sitterheelal**, geldt dan:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{3}\Lambda R^2(t)$$

Hieruit volgt: $\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} R(t) \rightarrow$

$$R(t) = ae^{\sqrt{\Lambda/3}t}$$

Een dergelijk snel expanderend heelal (voor $R(t) = ae^{+\sqrt{\Lambda/3}t}$) heet een **inflatieheelal**.

Uit $\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} R(t)$ volgt $H(t) = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} \rightarrow$

$$R(t) = ae^{H(t)t}$$

Voor het zgn. **statische Einsteinheelal** geldt: $\frac{dR}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = 0 \rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi G \rho(t) + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R^2(t)} = 0 \Leftrightarrow k = \left\{ \frac{8}{3}\pi G \rho(t) + \frac{1}{3}\Lambda \right\} R^2(t) > 0$$

Dit heelal is dus altijd gesloten.

Voor een materiegedomineerd heelal geldt: ($\rho(t) \propto R^{-3}(t)$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{8}{3}\pi G \rho(t) R^2(t) + \frac{1}{3}\Lambda R^2(t) - k \rightarrow 2 \frac{dR}{dt} \cdot \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{8}{3}\pi G \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R(t)} \right) + \frac{2}{3}\Lambda R(t) \frac{dR}{dt} \Leftrightarrow \\ \frac{dR}{dt} \cdot \frac{d^2R}{dt^2} &= \frac{4}{3}\pi G \cdot -\frac{1}{R^2(t)} \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{1}{3}\Lambda R(t) \frac{dR}{dt} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho(t) R(t) + \frac{1}{3}\Lambda R(t)$$

De eerste term in het rechterdeel is de naar binnen gekeerde gravitatieversnelling $g = -GM/R^2(t)$ van een bol met straal R en massa $M = \frac{4}{3}\pi \rho(t) R^3(t)$; Λ zorgt voor een compenserende naar buiten gerichte “negatieve gravitatiekracht” met versnelling $g_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda R(t)$.

Uit de DV voor $R(t)$ volgt dat $\ddot{R}(t) = 0$ alleen als geldt:

$$\boxed{\varrho(t) = \frac{\Lambda}{4\pi G}}$$

Voor een deeltje dat onder een potentiaal $\Phi(R)$ beweegt - met $\varrho(t) = 3M/4\pi R^3(t)$ - geldt:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = a_R = -\frac{GM}{R^2(t)} + \frac{1}{3}\Lambda R(t) = -\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R} \rightarrow \Phi(R) = -\frac{GM}{R(t)} - \frac{1}{6}\Lambda R^2(t)$$

Voor het Einsteinheellal geldt: $a_R = 0 \rightarrow$

$$\boxed{\Lambda = \frac{3GM}{R^3(t)}}$$

Stel: $R(t) \rightarrow R(t) + \delta R(t) \mid \delta R(t) \ll R(t)$

Voor de bewegingsvergelijking van de verstoring geldt dan:

$$\left. \begin{aligned} \delta R(t) \frac{da_R}{dR} &= a_{R+\delta R} - a_R \\ \frac{d^2}{dt^2}(a_{R+\delta R}) - \frac{d^2 a_R}{dt^2} &= \frac{d^2 \delta R}{dt^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d^2 \delta R}{dt^2} = \frac{da_R}{dR} \delta R(t) = -\frac{\partial^2 \Phi(R)}{\partial R^2} \delta R(t)$$

Tevens geldt: $\frac{\partial^2 \Phi(R)}{\partial R^2} = -\frac{2GM}{R^3(t)} - \frac{1}{3}\Lambda = -\Lambda \rightarrow \frac{d^2 \delta R}{dt^2} = \Lambda \delta R(t) \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{d\delta R}{dt}\right)^2 = 2\Lambda \{\delta R(t)\}^2 \rightarrow \frac{d\delta R}{dt} = \sqrt{2\Lambda} \delta R(t) \rightarrow$$

$$\boxed{\delta R(t) = C e^{\sqrt{\Lambda} t}}$$

Elke verstoring groeit dus exponentieel \rightarrow Het Einsteinheellal is instabiel.

De massadichtheid $\varrho(t)$ wordt in de ART geïnterpreteerd als de *equivalente massa per volume-eenheid*:

$$\boxed{\varrho(t) = \frac{\varepsilon}{c^2} = \sum_i \frac{n_i(t) \bar{E}_i}{c^2}}$$

Hierin is $n_i(t)$ het aantal deeltjes per volume-eenheid van soort i , \bar{E}_i de gemiddelde totale energie per deeltje van soort i en ε de energiedichtheid.

Voor een deeltje geldt de energie-impulsmomentrelatie: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^2}$

$p \ll mc \Rightarrow E \approx mc^2 + (p^2/2m)$ (niet-relativistisch, stof)

$p \gg mc \Rightarrow E \approx pc$ (extreem relativistisch, straling)

Voor de roodverschuiving van een foton op tijd $t + \Delta t$ t.g.v. de expansie van het heellal geldt:

$$z = \frac{\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{\lambda(t)} \cdot \frac{\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)}{\Delta t} \Delta t \approx \frac{1}{\lambda(t)} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \Delta t$$

$$\frac{v}{c} = \frac{HD}{c} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \cdot \frac{D}{c} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \Delta t \rightarrow \frac{1}{\lambda(t)} \cdot \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \rightarrow \ln |\lambda(t)| = \ln |R(t)| \rightarrow$$

$\lambda(t) \propto R(t) \rightarrow$

$$\boxed{\lambda(t) = \lambda(t_0) \frac{R(t)}{R(t_0)}}$$

Voor de energie-afname van een foton t.g.v. de expansie van het heelal geldt dan:

$$E(t) = \frac{hc}{\lambda(t)} = \frac{hc}{\lambda(t_0)} \cdot \frac{R(t_0)}{R(t)} = E(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)} \rightarrow$$

$$\boxed{E(t) = E(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)}}$$

Voor het aantal fotonen in een expanderend volume geldt: $n(t)V(t) = n(t_0)V(t_0)$

Substitutie van $V(t)$ geeft dan: $n(t) = n(t_0)\{R(t_0)^3/R^3(t)\} \rightarrow$

$$\boxed{n(t) = n(t_0) \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^3}$$

$$\varrho(t)_{foton} = \frac{n(t)E(t)}{c^2} = \frac{n(t_0)}{c^2} \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^3 E(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{n(t_0)E(t_0)}{c^2} \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^4 \rightarrow$$

$$\boxed{\varrho(t)_{foton} = \varrho(t_0)_{foton} \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^4}$$

Deze afname van ϱ voor fotonen geldt ook voor een gas van relativistische deeltjes, d.w.z. als $T \gg mc^2$; materie waarvan de dichtheid evenredig is aan $R^{-4}(t)$ heet daarom **straling**. Als $T \ll mc^2$ spreekt men van **stof**: $E(t) = mc^2 = E(t_0)$

$$\varrho(t)_{stof} = \frac{n(t)E(t)}{c^2} = \frac{n(t_0)E(t_0)}{c^2} \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^3 \rightarrow$$

$$\boxed{\varrho(t)_{stof} = \varrho(t_0)_{stof} \left\{ \frac{R(t_0)}{R(t)} \right\}^3}$$

In een met straling gevuld expanderend heelal neemt ϱ dus sneller af t.g.v. de energie-afname van de deeltjes dan in een heelal gevuld met stof. Na ongeveer 10^5 jaar is hierdoor het heelal van stralings- in materiegedomineerd overgegaan. Tevens geldt voor de energie van een deeltje t.g.v. de warmtebeweging dat deze evenredig is met $k_b T$, waarbij k_b de constante van Boltzmann is en T de temperatuur. Daar de rustmassa van een foton nul is, is alle energie van een foton dus kinetische energie.

Voor het aantal deeltjes δN dat een oppervlak dA per sec. passeert met snelheid \vec{v} en een invalshoek θ t.o.v. de X -as geldt: $\delta N = n(\vec{p})v_x \delta A$; hierin is $n(\vec{p})$ het aantal deeltjes per cm^3 met impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Als de normaal op dA samenvalt met de X -as, dan geldt voor de impuls $\delta \Pi_x$ door dA : $\delta \Pi_x = \delta N p_x = n(\vec{p})p_x v_x \delta A \rightarrow$

$$P = \frac{\delta \Pi_x}{\delta A} = \sum_{\text{alle deeltjes}} \overline{n(\vec{p})p_x v_x} = \sum_{\text{alle deeltjes}} n(p) \frac{c^2 p^2}{3E} \quad (\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = \overline{p_z^2} = \frac{1}{3} p^2 \quad \wedge \quad n(\vec{p}) = n(p))$$

hetgeen overeenkomt met een isotrope deeltjesverdeling).

Voor stof geldt: $E \approx mc^2 \quad \wedge \quad p \approx mv \rightarrow P_{stof} \approx \sum n(p) \frac{p^2}{3m} = \frac{2}{3} \sum n(p) \frac{p^2}{2m} = \frac{2}{3} E_k \ll \varepsilon$

Voor straling geldt: $E \approx pc \rightarrow P_{straling} \approx \sum n(p) \frac{1}{3} E = \frac{1}{3} \varepsilon c^2 \approx E_k \quad (nmc^2 \ll \varepsilon)$

Voor de totale entropie S in een volume $V(t) = V_0 \{R(t)/R_0(t)\}^3$ in een expanderend heelal geldt: $dQ = TdS = 0 \rightarrow dE = dQ - PdV = -PdV$

Voor de totale energie E in $V(t)$ geldt: $E = \varepsilon V = \varrho c^2 V \rightarrow$
 $\frac{dE}{dt} = c^2 \left(V \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \frac{dV}{dt} \right) = -P \frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\varrho}{dt} = - \left(\varrho + \frac{P}{c^2} \right) \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \right)$
 Substitutie van $\frac{dV(t)}{dt} = 3V_0(t) \frac{R^3(t)}{R^3(t_0)} \cdot \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} = 3V(t)H(t)$ geeft:

$$\boxed{\frac{d\varrho}{dt} = -3 \left(\varrho + \frac{P}{c^2} \right) H(t)}$$

Substitutie van $H(t) = R^{-1}(t)\dot{R}(t)$, $dR/dt = d\{\ln R(t)\}$ en $d\varrho/\varrho = d(\ln \varrho)$ geeft $\varrho(t)$ als functie van $R(t)$:

$$\boxed{\frac{d(\ln \varrho)}{d(\ln R)} = -3 \left(1 + \frac{P}{\varrho c^2} \right)}$$

De verhouding fotonen tot baryonen is momenteel ongeveer $10^9 : 1$, zodat de fotonen de entropie van het heelal vertegenwoordigen. Daar $T \propto R^{-1} \wedge V \propto R^3 \propto T^{-3} \wedge \varepsilon_f = 3P_f = a_r T^4$, volgt uit $dE = -PdV$: $d(\varepsilon_f V) + P_f dV = T dS_f = 0$

De **fotonenentropie** S_f wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{S_f = \left(\frac{\varepsilon_f + P_f}{T} \right) V = \frac{4}{3} a_r T^3 V}$$

Uit $T^3 V = R^{-3} R^3 = 1$ volgt:

$$\boxed{S_f = \text{const.}}$$

De totale entropie binnen het waarneembare heelal is: $S \approx \frac{4}{3} \pi d_0^3 S_f = 10^{40}$ erg/K
 Hierin is d_0 de **Hubblestraal** waarvoor geldt:

$$\boxed{d_0 = \frac{c}{H_0}}$$

De dimensieloze **entropiemaat** S_m wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{S_m = \frac{S}{k_b} \approx 10^{57}}$$

Aan een foton kan een stralingstemperatuur T_r worden toegekend, zodat geldt:

$E_f = \frac{hc}{\lambda} \approx k_b T_r$. Daar $E_f \propto \frac{R(t_0)}{R(t)}$ volgt hieruit:

$$\boxed{T_r(t) = T_r(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)}}$$

In natuurlijke eenheden geldt: $\hbar = c = k_b = 1$ en is de eenheid van energie 1 GeV. De nieuwe natuurlijke eenheid van tijd en lengte wordt dan $\hbar/1 \text{ GeV} \approx 6,5 \cdot 10^{-25} \text{ s}$ resp. $\hbar c/1 \text{ GeV} \approx 1,9 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$. Een aantal fundamentele relaties wordt nu geschreven als:

Rustenergie:	$E_0 = m$
Thermische energie:	$E_{th} = T$
Energie-impulsrelatie:	$E = \sqrt{p^2 + m^2}$
Equivalente massadichtheid:	$E = \omega$
Deeltje/golfdualiteit:	$\vec{p} = \vec{k}$
Heisenbergrelaties:	$\Delta p \Delta x \geq 1 \quad \wedge \quad \Delta E \Delta t \geq 1$
Planckmassa:	$m_p = 1/\sqrt{G}$
Gravitatieconstante:	$G = 1/m_p^2$
Fotondichtheid:	$n_f = (2,4/\pi^2)T^3$
Energiedichtheid:	$\varepsilon_f = (\pi^2/15)T^4$

Massa en temperatuur worden dus uitgedrukt in GeV, deeltjesdichtheid in GeV^3 en energiedichtheid in GeV^4 , tevens geldt:

$$m_p = T_p = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{L_p}$$

In het vroege stralingsgedomineerde heelal waarin vrijwel alle deeltjes relativistisch zijn geldt voor de deeltjesdichtheid $n(T)$ en energiedichtheid $\varrho(T)$ in natuurlijke eenheden:

$$n(T) = \frac{1,202g(T)}{\pi^2} T^3$$

$$\varrho(T) = \frac{\pi^2 g_*(T)}{30} T^4$$

Hierin bepalen $g(T)$ en $g_*(T)$ het aantal vrijheidsgraden en zijn van de vorm:

$$g(T) = \sum g_b + \frac{3}{8} \sum g_f$$

$$g_*(T) = \sum g_b + \frac{7}{8} \sum g_f$$

Hierin wordt in de eerste sommatie in het rechterlid over alle bosonsoorten gesommeerd en in de tweede sommatie over alle fermionsoorten, en zijn g_b en g_f de statistische gewichten van elke boson resp. fermionsoort.

Voor de **entropiedichtheid** $\mathcal{S}(T)$ geldt in natuurlijke eenheden:

$$\mathcal{S}(T) = \frac{\varepsilon(T) + P(T)}{T} = \frac{\varrho(T) + \frac{1}{3}\varrho(T)}{T} \rightarrow$$

$$\mathcal{S}(T) = \frac{2}{45}\pi^2 g_*(T) T^3$$

Voor het entropiebehoud volgt hieruit:

$$S = \mathcal{S}(T)R^3(T) = \frac{2}{45}\pi^2 g_*(T) T^3 R^3(t)$$

Voor de Friedmannvergelijking in natuurlijke eenheden geldt:

$$(Ht_p)^2 = \frac{8\pi G \varrho(t)}{3m_p^2} + \frac{\Lambda}{3m_p^2} - \frac{k}{m_p^2 R^2(t)}; \text{ substitutie van } \varrho(T) \text{ geeft dan:}$$

$$(Ht_p)^2 = \frac{4\pi^3 g_*(T)}{45} \left(\frac{T}{m_p}\right)^4 + \frac{\Lambda}{3m_p^2} - \frac{k}{m_p^2 R^2}$$

Substitutie van $R = \left(\frac{45S}{2\pi^2 g_*(T)} \right)^{1/3} \frac{1}{T}$ en $\Lambda = \frac{8\pi \rho_{vac}}{m_p^2}$ geeft:

$$(Ht_p)^2 = \frac{4\pi^3 g_*(T)}{45} \left(\frac{T}{m_p} \right)^4 + \frac{8\pi \rho_{vac}}{3m_p^4} - \kappa(T) \left(\frac{T}{m_p} \right)^2$$

Hierin is $\kappa(T)$ een dimensieloze krommingsparameter waarvoor geldt:

$$\kappa(T) = k \left(\frac{2\pi^2 g_*(T)}{45S} \right)^{2/3}$$

$T > 300\text{GeV} \Rightarrow g_*(T) \approx 100 \rightarrow \kappa(T) \approx \text{constant}$.

$S \gg 1 \Rightarrow \kappa(T) \approx 0$

De vlakheid van het huidige heelal is dus een gevolg van de grote entropie ($S \approx 10^{57}$).

De kromming van een 2-dimensionaal oppervlak in een 3-dimensionale ruimte kan uitgedrukt worden in componenten van de metrische tensor g_{mn} en zijn afgeleiden d.m.v. de

Krommingsformule van Gauss:

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left[-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right\} \right]$$

De waarde van K is in elk punt van een oppervlak invariant, onafhankelijk van het gebruikte coördinatenstelsel. Om oppervlakken en ruimten te beschrijven in hogere dimensies is de Riemann-Christoffel krommingstensor $R^i{}_{klm}$ nodig.

In een 3-dimensionale *isotrope* ruimte met constante kromming K en bolcoördinaten (r, ν, ϕ) definieert de radiale component r een **hyperboloppervlak**, waarvan de grootte van het oppervlak per definitie $4\pi r^2$ is. Op dit oppervlak is r constant en wordt de plaats bepaald door ν en ϕ ; de metriek van deze 2-dimensionale ruimte is dan: $ds_{r=const.}^2 = r^2 d\nu^2 + r^2 \sin^2 \nu d\phi^2$.

Daar de ruimte gekromd is, is r *niet* de (eigen) straal van de hyperbol \rightarrow

$ds^2 = f(r) dr^2 + r^2 d\nu^2 + r^2 \sin^2 \nu d\phi^2$, met $d(r, \nu, \phi; r + dr, \nu, \phi) = \sqrt{f(r)} dr$. een opeenvolging van concentrische hyperbollen definieert zo een coördinatenstelsel in de ruimte. De bepaling van $f(r)$ volgt uit de aanname dat de ruimte isotroop is, zodat alle geodetische oppervlakken dezelfde kromming hebben. Voor het oppervlak $\nu = \frac{1}{2}\pi$ geldt: $d\nu = 0 \rightarrow ds_{\nu=\frac{1}{2}\pi}^2 = f(r) dr^2 +$

$$r^2 d\phi^2 |_{x^1} = r \wedge x^2 = \phi \rightarrow g_{mn} = \begin{pmatrix} f(x^1) & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$g_{11} = f(x^1) \wedge g_{22} = (x^1)^2$$

Substitutie in K geeft: $K = \frac{df(x^1)/dx^1}{2f^2(x^1)/x^1} \rightarrow \frac{d}{dx^1} \left(\frac{1}{f(x^1)} \right) = 2Kx^1 \Leftrightarrow$

$$\frac{-1}{f(x^1)} = K(x^1)^2 + C' \Leftrightarrow f(x^1) = \frac{1}{C - K(x^1)^2}; K = 0 \Rightarrow f(r) = f(x^1) = 1 \rightarrow C = 1 \rightarrow$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\nu^2 + \sin^2 \nu d\phi^2)$$

Voor de eigen straal van de hyperbol geldt:

$$a(r) = \int_0^{a(r)} ds = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin(r\sqrt{K}) \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{K}} \rightarrow$$

$$A = \frac{4\pi}{K} \sin^2(a\sqrt{K})$$

$$K < 0 \Rightarrow \sin^2(a\sqrt{K}) = \sin^2(ia\sqrt{|K|}) = \sinh^2(a\sqrt{|K|}) \rightarrow$$

$$A = \frac{4\pi}{|K|} \sinh^2(a\sqrt{|K|})$$

Hieruit volgt: $K < 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} A = \infty$

$K > 0 \rightarrow A$ is max. voor $a = \pi/2\sqrt{K}$ en min. voor $a = \pi/\sqrt{K}$:

$$A_{max} = \frac{4\pi}{K} \wedge A_{min} = 0$$

Een isotrope ruimte met constante kromming is dus gesloten.

Het heelal kan worden beschouwd als een “vloeistof” waarvan de “atomen” de sterrenstelsels zijn. Op grote schaal geldt het **Kosmologisch principe**: alle punten in het heelal zijn ongeveer hetzelfde, ofwel het heelal is **homogeen**. Tevens lijkt het heelal **isotroop** te zijn, d.w.z. in elk punt ziet het heelal er in elke richting ongeveer hetzelfde uit.

Meebewegende coördinaten zijn coördinaten die met de expansie van het heelal meegaan. De tijdcoördinaat t wordt gemeten door klokken die met de meebewegende coördinaten verbonden zijn.

De homogeniteit en isotropie van het heelal houden in dat de 3-dimensionale plaatsruimte op $t = \text{constant}$ bepaald wordt door één bepaalde kromming die overal dezelfde is, maar wèl van de tijd kan afhangen: $K(t)$. In de vergelijking van de metriek van een dergelijke ruimte, $ds^2 = \{dr^2/(1-Kr^2) + r^2(d\nu^2 + \sin^2\nu d\phi^2)\}$, is r gèèn meebewegende coördinaat, daar de oppervlakte van de hyperbol niet toeneemt met de expansie van het heelal.

$$\text{Stel: } K(t) = \frac{k}{R^2(t)} \wedge \sigma = \frac{r}{R(t)} \rightarrow r^2 = \sigma^2 R^2(t) \wedge dr^2 = d\sigma^2 R^2(t) \rightarrow$$

$$ds^2 = R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2(d\nu^2 + \sin^2\nu d\phi^2) \right\}$$

Daar langs de wereldlijn van een meebewegende waarnemer σ , ν en ϕ constant zijn en dus de eigen afstand tussen elke 2 punten op dezelfde wijze met de tijd verandert, moet de tijdcoördinaat t dezelfde zijn als de eigentijd $\tau \rightarrow d\tau^2 = dt^2 - (dr^2/c^2) \Leftrightarrow c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \rightarrow$ **Robertson-Walker metriek**:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2(d\nu^2 + \sin^2\nu d\phi^2) \right\}$$

Voor een vlak heelal is k nul en is de RW-metriek identiek aan de bolcoördinaten in een vlakke ruimte (m.u.v. de oprekking van de RW-metriek door de schaalfactor t.g.v. de expansie van

het heelal). Het stelsel van meebewegende coördinaten is het natuurlijkste stelsel, daar dit in rust is t.o.v. de gemiddelde lokale materie van het - expanderende - heelal.

De eigen (radiale) afstand van het melkwegstelsel ($\sigma = 0$) tot een ander melkwegstelsel ($\sigma = \sigma$) op tijd t volgt uit (met $dv^2 = d\phi^2 = 0$): $D(t) = R(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = \begin{cases} R(t) \arcsin \sigma & (k = 1) \\ R(t)\sigma & (k = 0) \\ R(t) \operatorname{arsinh} \sigma & (k = -1) \end{cases}$

Voor de eigen snelheid $v(t)$ volgt hieruit: $v(t) = \frac{dD(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} \rightarrow$

$$v(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} D(t)$$

Als op tijdstip t_e en $t_e + \Delta t_e$ licht wordt uitgezonden van een sterrenstelsel op afstand σ_e en op Aarde wordt ontvangen op tijdstip t_0 resp. $t_0 + \Delta t_0$ (met $\sigma = 0$) dan geldt, daar het licht radiaal langs een nulgeodeet beweegt:

$$0 = \Delta t^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \left\{ \frac{\Delta \sigma^2}{1 - k\sigma^2} \right\} \rightarrow \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}$$

Daar $R(t) \approx \text{constant}$ is, geeft integratie:

$$\left[\frac{t}{R(t)} \right]_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} - \left[\frac{t}{R(t)} \right]_{t_e}^{t_0} = 0$$

Daar $R(t_0 + \Delta t_0) \approx R(t_0)$ en $R(t_e + \Delta t_e) \approx R(t_e)$, volgt hieruit: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$

Substitutie in $z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} = \frac{c\Delta t_0 - c\Delta t_e}{c\Delta t_e}$ geeft:

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} - 1$$

In een expanderend heelal geldt: $R(t_0) > R(t_e) \rightarrow z > 0$

$$R(t_e) = R(t_0) + (t_e - t_0)\dot{R}(t_0) + \frac{1}{2}(t_e - t_0)^2\ddot{R}(t_0) + \dots \Leftrightarrow$$

$$R(t_e) = R(t_0) \left\{ 1 + H_0(t_e - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_e - t_0)^2 + \dots \right\}$$

Hierin is $H_0 = \dot{R}(t_0)/R(t_0)$, d.w.z. de huidige waarde van H en q_0 de **vertragsingsparameter**:

$$q_0 = \frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)H_0^2}$$

Als de expansie van het heelal afneemt, dan is $\ddot{R}(t_0) < 0$, end dus $q_0 > 0$.

Substitutie van $R(t_e)$ in z geeft:

$$z = H_0(t_0 - t_e) + (1 + \frac{1}{2}q_0)H_0^2(t_0 - t_e)^2 + \dots$$

Voor $t_0 - t_e$ uitgedrukt in z volgt hieruit:

$$t_0 - t_e = H_0^{-1} \{ z - (1 + \frac{1}{2}q_0)z^2 + \dots \}$$

$R(t)$ en k bepalen de kromming van de 3-dimensionale plaatsruimte op tijdstip t en worden zelf bepaald door de zelfgravitatie van alle massa in het heelal.

$\mathcal{K}(t)$ is de kromming van de ruimtetijd en wordt gedefinieerd als de kromming van het 2-dimensionale “oppervlak” gekarakteriseerd door de variabelen t en σ , met ν en ϕ constant. Uit de Robertson-Walker metriek volgt dan:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} \right\} \rightarrow g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2(t)/\{c^2(1 - k\sigma^2)\} \end{pmatrix}$$

$$\text{Stel: } \left. \begin{matrix} t = x^1 \\ \sigma = x^2 \end{matrix} \right\} \rightarrow g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2(x^1)/\{c^2(1 - k(x^2)^2)\} \end{pmatrix}$$

Substitutie in $K(t)$ geeft:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{c^2\{1 - k(x^2)^2\}}{2R^2(x^1)} \left[-\frac{2\dot{R}(x^1) - 2R(x^1)\ddot{(x^1)}}{c^2\{1 - k(x^2)^2\}} + \frac{c^2\{1 - k(x^2)^2\}}{2R^2(x^1)} \left(\frac{2R(x^1)\dot{R}(x^1)}{c^2\{1 - k(x^2)^2\}} \right)^2 \right] \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{K}(t) = -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)}}$$

$\mathcal{K}(t)$ is evenredig met de massaverdeling $\varrho(t)$: $\mathcal{K}(t) \propto \alpha \varrho(t) G^l c^m + \text{constante}$

De constante is toegevoegd omdat een lege ruimtetijd ($\varrho(t) = 0$) eventueel gekromd kan zijn. Daar $\mathcal{K}(t)$ de dimensie t^{-2} heeft en α dimensieloos is, is $l = 1$ en $m = 0$.

Om in de Newtonse limiet voor zwakke gravitatievelden dezelfde uitkomst te verkrijgen, moet $\alpha = 4\pi/3$ zijn. De constante wordt geschreven als $-\Lambda/3$, met Λ de kosmologische constante. Substitutie in $\mathcal{K}(t)$ geeft:

$$\boxed{\mathcal{K}(t) = \frac{4}{3}\pi\varrho(t)G - \frac{1}{3}\Lambda}$$

Substitutie in $\mathcal{K}(t) = -\ddot{R}(t)/R(t)$ geeft de **bewegingsvergelijking voor $R(t)$** :

$$\boxed{\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi\varrho(t)GR(t) + \frac{1}{3}\Lambda R(t)}$$

Λ is een nieuwe onafhankelijke natuurconstante die echter wel nul zou kunnen zijn. Een $\Lambda \neq 0$ zou strijdig zijn met het **Principe van Mach**, dat stelt dat het gedrag van een lokale materie het gevolg is van de invloed van de materie in de rest van het heelal. Een $\Lambda \neq 0$ kromt een lege ruimte dus, onafhankelijk van materie.

Uit de bewegingsvergelijkingen volgt dat een pos. Λ overeenkomt met een neg. $\varrho(t)$, hetgeen een versnelling van de expansie van het heelal teweeg brengt. De term $\frac{1}{3}\Lambda R(t)$ heet daarom de **kosmologische afstotingsterm**.

Daar in een meebewegende bol de massa constant is en het volume evenredig met $R^3(t)$, geldt: $\varrho(t)R^3(t) = \varrho(t_0)R^3(t_0)$

Substitutie van $\varrho(t) = \varrho(t_0)R^3(t_0)/R^3(t)$ in $\ddot{R}(t)$ geeft: $\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi\varrho(t_0)GR^3(t_0)}{3R^2(t)} + \frac{\Lambda R(t)}{3}$

Vermenigvuldiging van beide leden met $2\dot{R}(t)$ en integratie geeft:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi\varrho(t_0)GR^3(t_0)}{3R(t)} + \frac{1}{3}\Lambda R^2(t) + \text{constante}$$

Substitutie van $\varrho(t)$ en $-kc^2$ voor de constante geeft dan de Friedmannvergelijking:

$$\boxed{\dot{R}^2(t) = \frac{8}{3}\pi\varrho(t)GR^2(t) + \frac{1}{3}\Lambda R^2(t) - kc^2}$$

Substitutie van $\ddot{R}(t_0) = -q_0 R(t_0) H_0^2$ in $\ddot{R}(t)$, met $\varrho(t_0) \equiv \varrho_0$ en $t = t_0$ geeft:

$$\Lambda = 4\pi\varrho_0 G - 3q_0 H_0^2$$

Substitutie van $\dot{R}^2(t_0) = R^2(t_0) H_0^2$ in $\dot{R}^2(t)$, met $\varrho(t_0) \equiv \varrho_0$ en $t = t_0$ geeft:

$$k = \frac{R^2(t_0)}{c^2} \{4\pi\varrho_0 G - H_0^2(q_0 + 1)\}$$

Als $\Lambda = 0$ dan is q_0 te schrijven als:

$$q_0 = \frac{4\pi\varrho_0 G}{3H_0^2}$$

Substitutie van $\dot{R}^2(t_0) = R^2(t_0) H_0^2$ en $\varrho_0 = 3q_0 H_0^2 / 4\pi G$ in $\dot{R}^2(t) = \frac{8}{3}\pi\varrho_0 G R^2(t) - kc^2$ geeft voor k :

$$k = \frac{R^2(t_0) H_0^2}{c^2} \{2q_0 - 1\}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi\varrho_0 G R^3(t_0)}{3R(t)} + \frac{1}{3}\Lambda R^2(t) - kc^2 \equiv A(R(t)) \rightarrow$$

$$dt = \frac{dR}{\sqrt{A(R(t))}} \rightarrow t - t_1 = \int_{R(t_1)}^{R(t)} \frac{dr}{\sqrt{A(R(t))}}$$

$\Lambda \leq 0 \Rightarrow \forall R(t) : \ddot{R}(t) < 0 \rightarrow \dot{R}(t)$ was in het verleden groter $\rightarrow t_0 < H_0^{-1}$

Daar $R(t)$ vroeger eens nul was, was ϱ dus oneindig.

$\Lambda > 0 \Rightarrow \dot{R}(t)$ is niet steeds neg.: $R(t)$ neemt in het verleden af tot een min. $\neq 0$, en neemt daarnaar weer toe en dus was $\varrho \neq \infty$.

$R(t) = \text{min.} \Rightarrow \dot{R}(t) = 0$ ofwel $A(R(t)) = 0$

$k = 0, -1 \Rightarrow A(R(t)) > 0 \rightarrow$ heelal begon met $\varrho = \infty$.

$k = 1 \Rightarrow A(R(t))$ heeft een min. voor $\dot{A}(R(t)) = 0 \rightarrow$

$$-\frac{8\pi\varrho_0 G R^3(t_0) \dot{R}(t)}{3R^2(t)} + \frac{2\Lambda R(t) \dot{R}(t)}{3} = 0 \rightarrow$$

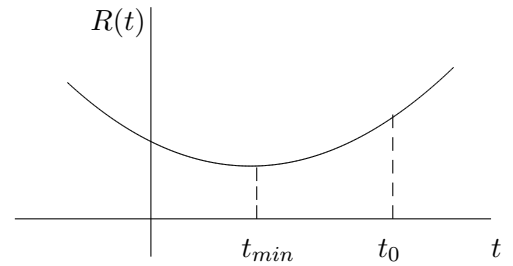
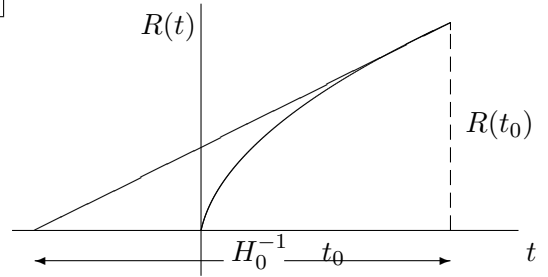
$$R_c(t) = \left\{ \frac{4\pi\varrho_0 G R^3(t_0)}{\Lambda} \right\}^{1/3}$$

Substitutie van $R_c(t)$ in $A(R(t))$ geeft:

$$A(R_c(t)) = \{4\pi\varrho_0 G R^3(t_0)\}^{2/3} \Lambda^{1/3} - c^2$$

Een begintoestand met $\varrho = \infty$ is alleen dan te vermijden als $\Lambda < \Lambda_c$, waarbij Λ_c volgt uit de voorwaarde $A(R_c(t)) = 0$:

$$\Lambda_c = \frac{c^6}{\{4\pi\varrho_0 G R^3(t_0)\}^2}$$



Voor de toekomst geldt: $\Lambda < 0 \Rightarrow \forall R(t) : \ddot{R}(t) < 0 \rightarrow$ huidige expansie neemt af, komt tot stilstand en gaat over in een contractie.

$\Lambda = 0 \Rightarrow \ddot{R}(t) < 0$ voor $R(t) \neq \infty$ en nul voor $R(t) = \infty$.

$\Lambda > 0 \wedge k = -1 \vee k = 0 \Rightarrow \dot{R}(t)$ wordt nooit nul en de expansie gaat altijd door.

$\Lambda > 0 \wedge k = 1 \wedge \Lambda < \Lambda_c \Rightarrow \dot{R}(t)$ kan nul worden en de expansie kan gevolgd worden door een contractie.

De voornaamste Friedmann heelalmodellen zijn:

I. $\Lambda = 0$

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{A(R(t))}} = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{\{8\pi\rho_0 G R^3(t_0)/3R(t)\} - kc^2}} \rightarrow$$

$$t = \begin{cases} \frac{R_m}{c} \left[\arcsin \sqrt{\frac{R(t)}{R_m}} - \sqrt{\left\{ \frac{R(t)}{R_m} \left(1 - \frac{R(t)}{R_m} \right) \right\}} \right] & \text{voor } k = 1 \\ \frac{2R_m}{3c} \left(\frac{R(t)}{R_m} \right)^{3/2} & \text{voor } k = 0 \\ \frac{R_m}{c} \left[\sqrt{\left\{ \frac{R(t)}{R_m} \left(1 + \frac{R(t)}{R_m} \right) \right\}} - \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{R(t)}{R_m}} \right] & \text{voor } k = -1 \end{cases}$$

Hierin is $R_m = 8\pi\rho_0 G R^3(t_0)/3c^2$, zijnde de max. $R(t)$ op $t = t_m$ als $k = 1$.

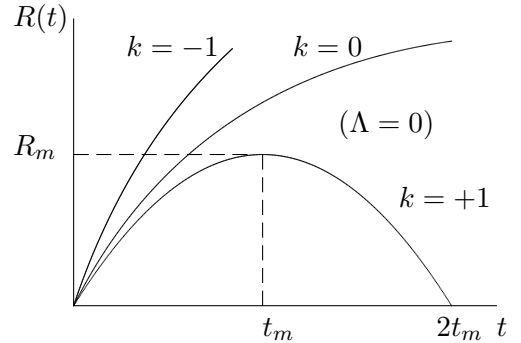
$$k = \frac{R^2(t_0)}{c^2} H_0^2 \{2q_0 - 1\} \rightarrow R^3(t_0) = \frac{k^{3/2} c^3}{H_0^3 (2q_0 - 1)^{3/2}}; \text{ substitutie hiervan en van } \rho_0 = \frac{3q_0 H_0^2}{4\pi G}$$

in R_m met $k = \pm 1$ geeft:

$$R_m = \frac{2q_0 c}{H_0 |2q_0 - 1|^{3/2}}$$

$k = 0 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{2}$; substitutie in R_m en van ρ_0 geeft:

$$R_m = \frac{R^3(t_0) H_0^2}{c^2}$$

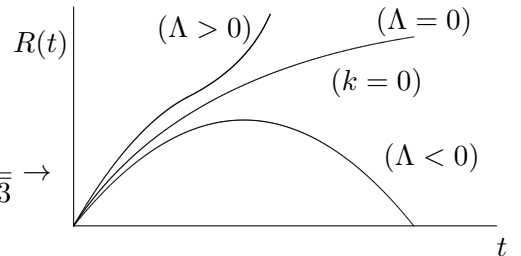


$$k = 1 \wedge q_0 \approx 1 \Rightarrow R_m \approx \frac{2c}{H_0} \approx 3,6 \cdot 10^{10} \text{ lichtjaar}$$

$$R(t) = R_m \Rightarrow t_m = \frac{\pi R_m}{2c} \approx 5,7 \cdot 10^{10} \text{ jaar}$$

II. $k = 0$

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{A(R(t))}} = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{\{8\pi\rho_0 G R^3(t)/3R(t)\} + \Lambda R^2(t)/3}} \rightarrow$$



$$t = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \operatorname{arsinh} \left[\left\{ \frac{R(t)}{R(t_0)} \right\}^{3/2} \sqrt{\frac{\Lambda}{8\pi\rho_0 G}} \right] & \text{voor } \Lambda > 0 \\ \frac{\{R(t)/R(t_0)\}^{3/2}}{\sqrt{6\pi\rho_0 G}} & \text{voor } \Lambda = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3|\Lambda|}} \arcsin \left[\left\{ \frac{R(t)}{R(t_0)} \right\}^{3/2} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi\rho_0 G}} \right] & \text{voor } \Lambda < 0 \end{cases}$$

Voor $R(t)$ volgt hieruit:

$$R(t) = \begin{cases} R(t_0) \left(\frac{8\pi\rho_0 G}{\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{3\Lambda} \right) & \text{voor } \Lambda > 0 \\ R(t_0) (6\pi\rho_0 G)^{1/3} t^{2/3} & \text{voor } \Lambda = 0 \\ R(t_0) \left(\frac{8\pi\rho_0 G}{|\Lambda|} \right)^{1/3} \sin^{2/3} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{3|\Lambda|} \right) & \text{voor } \Lambda < 0 \end{cases}$$

$k = 0 \Rightarrow 4\pi\rho_0 G - H_0^2(q_0 + 1) = 0$; substitutie in $\Lambda = 4\pi\rho_0 G - 3q_0 H_0^2$ geeft:

$$\Lambda = H_0^2(1 - 2q_0)$$

$q_0 \approx 1 \Rightarrow \Lambda \approx -H_0^2$; uit $R(t)$ volgt dan dat het heelal gesloten is.

III. $\rho = 0$

Dit komt overeen met het huidige heelal als de huidige massadichtheid gelijk is aan de dichtheid van de sterrenstelsels, die dan op te vatten zijn als testdeeltjes met een onderling te verwaarlozen gravitatiewisselwerking.

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{A(R(t))}} = \int_{c\sqrt{3/\Lambda}}^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{\{\Lambda R^2(t)/3\} - c^2}} \text{ met } \Lambda > 0 \wedge k = 1 \rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot \frac{R(t)}{c} \right)$$

(De ondergrens van de integraal kan niet nul zijn daar de arcosh niet gedefinieerd is voor $R(t) < c\sqrt{3/\Lambda}$).

Voor $R(t)$ volgt hieruit:

$$R(t) = c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right)$$

Dit heelal begint dus niet vanuit $R(t) = 0$ maar uit $R(t) = c\sqrt{3/\Lambda}$.

$$\Lambda < 0 \wedge k = -1 \Rightarrow t = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\sqrt{c^2 - \{|\Lambda|R^2(t)/3\}}} \rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot \frac{R(t)}{c} \right)$$

Voor $R(t)$ volgt hieruit:

$$R(t) = c \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t \right)$$

Dit heelal begint dus vanuit $R(t) = 0$ en is gesloten.

IV. Steady State heelalmodel

Dit heelal is gebaseerd op het **Perfecte Kosmologische Principe**: het heelal is altijd overal ongeveer hetzelfde. Dit heelal heeft dus geen begin; het bestaat al een oneindige tijdsduur. Uit het PKP volgt dat de expansie van het heelal steeds met dezelfde snelheid geschiedt, nl.

$$\text{met de waarde } H_0 \rightarrow H_0 = H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \Leftrightarrow \frac{dR(t)}{R(t)} = H(t) dt \rightarrow$$

$$R(t) = Ae^{H_0 t}$$

Daar $K(t) = \frac{k}{R^2(t)} = \frac{k}{A^2 e^{2H_0 t}}$ constant moet zijn, is k dus nul; de plaatsruimte is dus vlak.

$$\text{Voor de ruimtetijd geldt echter: } \mathcal{K}(t) = -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{AH_0^2 e^{H_0 t}}{Ae^{H_0 t}} \rightarrow$$

$$\mathcal{K}(t) = -H_0^2$$

$$\text{Uit } q_0 = -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)H_0^2} = -H_0^2 \cdot \frac{1}{H_0^2} \text{ volgt: } q_0 = -1$$

Daar $\varrho(t) = \frac{\varrho(t_0)R^3(t_0)}{R^3(t)}$, moet er dus massa geschapen worden ($R(t)$ neemt immers toe) om $\varrho(t)$ constant te houden.

Het **klassieke vacuüm** heeft de volgende eigenschappen:

1. **Translatie-invariant**: het vacuüm ziet er overal hetzelfde uit.
2. **Rotatie-invariant**: het vacuüm ziet er op elk punt in elke richting hetzelfde uit.
3. **Lorentz-invariant**: het vacuüm ziet er voor alle eenparig bewegende waarnemers hetzelfde uit.

Een klassiek vacuüm moet dus zowel lokaal als globaal leeg zijn.

In de quantumveldentheorie is het vacuüm een toestand van minimale energie, de zgn. **vacuümenergie** ofwel **nulpuntsenergie**, die het gevolg is van de vacuüm fluctuaties, d.w.z.

de creatie van virtuele deeltjes. Uit de veldtheorie volgt dat deze vacuümenergie oneindig is. Daar het i.h.a. om energieverschillen gaat, is dit geen probleem zolang de zwaartekracht niet in rekening wordt gebracht.

Een **constant scalarveld** is niet te onderscheiden van het vacuüm, daar het translatie-, rotatie- en Lorentz-invariant is, en tevens geen golven herbergt, en dus geen deeltjes kan vertegenwoordigen. Scalarvelden vloeien voort uit de elektrozwakke theorie in de vorm van **Higgsvelden**, die nodig zijn om de onderliggende symmetrie te verbergen en de ijkbosonen van de zwakke wisselwerking massa te geven.

Een Higgsveld ϕ met 2 tijdafhankelijke componenten kent aan elk punt van de ruimte dezelfde 2 getallen toe: $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$

In natuurlijke eenheden is de bijbehorende energiedichtheid ρ_ϕ te schrijven als:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\phi_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_2}{dt} \right)^2 \right\} + V(\phi, T)$$

Hierin is $V(\phi, T)$ de zgn. **Higgspotentiaal**, die afhangt van de amplitude $\phi = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$ van het veld en de temperatuur.

De bewegingsvergelijking voor ϕ in een expanderend heelal is te schrijven als:

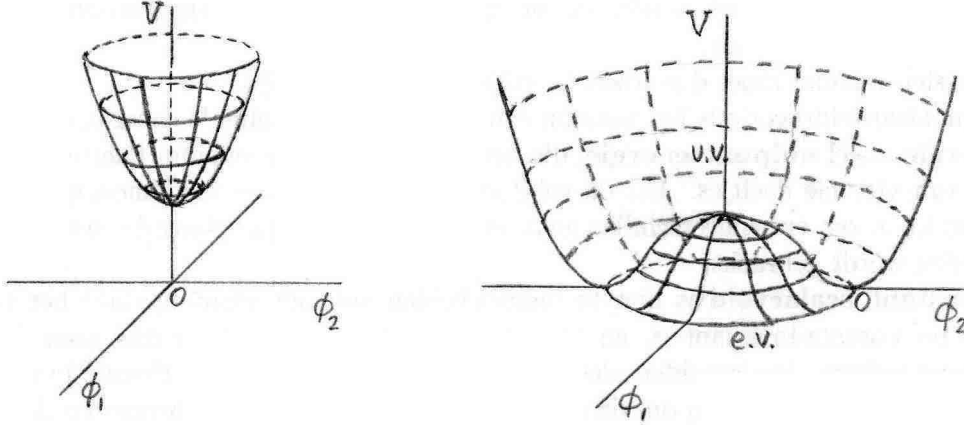
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + 3H(t) \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial V / \partial \phi_1 \\ \partial V / \partial \phi_2 \end{pmatrix}$$

De middelste “dempingsterm” geeft het effect van de expansie op de Higgsvelden.

Voor $T \gg M_{gut} \approx 10^{14} \text{ GeV} (\approx 10^{27} \text{ K})$ heeft V een min. bij $\phi_1 = \phi_2 = 0$ waarvoor geldt: $V_{min}(T \gg T_{gut}) = V(\phi = 0) \approx M_{gut}^4$

Voor $T \ll M_{gut}$ is het punt $\phi_1 = \phi_2 = 0$ nu een max. en is er een nieuw (lager) min. gevormd door de cirkel $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \phi_0^2 \approx M_{gut}^2$, waarvoor geldt:

$V_{min}(T \ll M_{gut}) = V(\phi_0) \approx 0$ hetgeen overeenkomt met het echte (huidige) vacuüm. De overgang van de ene naar de andere vorm van V vindt geleidelijk plaats bij dalende temperatuur rond $T \approx M_{gut}$. Bij $T \approx M_{gut}$ blijft het Higgsveld hangen in de toestand $\phi = 0$, met $\rho_\phi \approx V(\phi = 0) \approx M_{gut}^4$. Daar de energiedichtheid van de materie verder daalt, geldt: $\rho_{tot} \approx \rho_\phi$. Daar het constante Higgsveld ($\phi = 0$) niet te onderscheiden is van een vacuüm, heet deze toestand een **vals vacuüm**, met $\rho_\phi = \rho_{vac}$. Daat T verder daalt, verandert de vorm van V en ontstaat er een nieuw min. in $|\phi| = \phi_0$ met $V_{min} \approx 0$, hetgeen overeenkomt met de meest waarschijnlijke toestand. Daar de vorm van V rond $\phi = 0$ erg vlak is, blijft het Higgsveld echter lange tijd dicht bij de oude min. waarde $V(\phi = 0)$: de fase-overgang naar het nieuwe min. wordt uitgesteld en het heelal blijft in de toestand van het valse vacuüm verkeren. Uiteindelijk bereikt het Higgsveld toch het nieuwe min. en is $\phi = \phi_0 \neq 0$ en is de symmetrie gebroken. De constante waarde $\phi_0 \neq 0$ van de amplitude van het Higgsveld doet een aantal ijkbosonen massief worden.



In de Weinberg-Salamtheorie krijgt ook het elektron massa t.g.v. een koppeling met een Higgsveld:

$$m_e = \frac{G_e}{\sqrt{2}} \phi$$

Hierin is G_e een dimensieloze koppelingsconstante.

Hoe sterker de koppeling aan een Higgsveld, des te groter de massa van het deeltje, evenredig met de amplitude van dat veld.

De Friedmannvergelijking bij aanwezigheid van een Higgsveld is te schrijven als:

$$(Ht_p)^2 = \frac{4\pi^3 g_*(T)}{45} \left(\frac{T}{m_p}\right)^4 + \frac{8\pi V(\phi, T)}{3m_p^4} - \kappa(T) \left(\frac{T}{m_p}\right)^2$$

Hierbij is de kinetische energieterm van het Higgsveld verdisconteerd in de eerste term evenredig met T^4 .

Als $T \approx M_{gut} \approx 10^{14} \text{ GeV}$ ($t \approx 10^{-34} \text{ s}$), dan komen de Higgsvelden in het min. terecht bij $\phi = 0$, en is $\rho_\phi \approx M_{gut}^4$. De Higgsenergie gaat overheersen over de thermische energie van de relativistische deeltjes als geldt: $\rho(T) \leq M_{gut}^4$; de temperatuur is dan gedaald tot:

$$T \approx \left(\frac{30}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4} M_{gut} \approx 10^{13} \text{ GeV}$$

Voor een heelal met $k = \Lambda = 0$ geldt: $H^2(t) = \frac{8\pi G \rho(t)}{3} = \frac{8\pi M_{gut}^4}{3m_p^2} = \text{const.} \Leftrightarrow$

$$\frac{dR}{dt} = CR(t) \rightarrow R(t) = Ce^{Ht}$$

Tijdens deze inflatiefase wordt elke $H^{-1} \approx 10^{-34} \text{ s}$ $R(t)$ een factor e groter. De **inflatiefactor** Z wordt gedefinieerd als de verhouding van $R(t)$ na en voor de inflatie; als de inflatietijd Δt is, geldt dus:

$$Z = e^{H\Delta t}$$

Voor $\Delta t \approx 10^{-32} \text{ s}$ en $H \approx 10^{34} \text{ s}^{-1}$ geldt dan $Z \approx e^{100} \approx 10^{43}$.

In natuurlijke eenheden geldt: $\frac{d\rho}{dt} = -3(\rho + P)H(t)$

Voor het vals vacuüm geldt: $\rho \approx \rho_{v.v.} \approx M_{gut}^4 = \text{const.} \rightarrow$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3(\rho_{v.v.} + P_{v.v.})H(t) \rightarrow$$

$$\boxed{P_{v.v.} = -\rho_{v.v.}}$$

De druk van het valse vacuüm is dus *negatief*.

Nadat de Higgsvelden langzaam van het max. van $V(\phi, T)$ zijn gerold, oscilleren ze enige tijd rond het nieuwe min. waarbij grote hoeveelheden deeltjes worden geproduceerd uit de vals vacuüm energie. Dit heet de **herverhitting van het heelal**, met $T_{na} \approx T_{voor}$ en $n_{na} \approx n_{voor}$. Alle materie en energie van het huidige heelal zijn dus ontstaan uit de energie van het vals vacuüm. Deze “kleine oerknal” vond plaats rond $t \approx 10^{-32}$ s.

De inflatiefase zorgt er voor dat de oorspronkelijke kromming van het heelal vrijwel wordt uitgewist, zodat het huidige heelal vrijwel vlak is. Ook de homogeniteit van het huidige heelal op grote schaal wordt door de inflatie bewerkstelligd.

In het onderkoelde expanderende vals vacuüm vormen zich spontaan bellen echt vacuüm. Daar de *richting* waarin het Higgsveld van het max. van $V(\phi, T)$ rolt niet vast ligt, en het echte vacuüm ergens op de cirkel $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \phi_0^2$ ligt, hebben de bellen echt vacuüm een verschillende oriëntatierichting van het Higgsveld. Dit maakt voor de natuurconstanten binnen een bel niets uit, daar deze alleen bepaald worden door de veldamplitude ϕ_0 , maar waar 2 bellen met verschillende oriëntatie botsen ontstaan zgn. **topologische defecten**, zoals 2-dimensionale scheidingswanden, kosmologische strings en magnetische monopolen. De eis dat grote aantallen van dergelijke defecten in het waarneembare heelal niet aanwezig zijn, hetgeen door de observaties wordt bevestigd, legt vrij sterke beperkingen aan de Higgspotential op.

In het **chaotische inflatiemodel van Linde** begint de inflatie een stuk eerder, nl. rond $t_p \approx 10^{-43}$ s; quantumfluctuaties spelen dan nog een rol.

Voor de energie binnen 1 horizon geldt: $E_H = \rho_p L_p^3 \approx m_p$

Uit $\Delta E \Delta t \geq 1$ volgt dat er quantumfluctuaties in de energie zijn waarvoor geldt:

$$\Delta E \approx t_p^{-1} = m_p \approx E_H$$

Het heelal rond t_p is dus opgebouwd uit gebieden met afmetingen $l \approx L_p$ en $\rho = E/l^3$, waarbij ρ van gebied tot gebied kan variëren in een bereik van $0 \leq \rho \leq 2m_p^4$.

Voor de energiedichtheid van een scalarveld ϕ met potentiaal $V(\phi)$ geldt bij benadering:

$$\rho_\phi \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + V(\phi)$$

In de chaotische toestand kan ϕ met ongeveer gelijke waarschijnlijkheid alle waarden aannemen voor $V(\phi) \leq 2m_p^4$. In een gebied waarin de energie van ϕ overheerst ontwikkelen ϕ en $R(t)$ zich dan gekoppeld. Ten gevolge van de inflatie wordt κ snel verwaarloosbaar.

Substitutie van ϕ in $H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho(t)$, met $G = \frac{1}{m_p^2}$, geeft:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + V(\phi) \right\} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 3H(t) \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \end{array} \right.$$

Deze gekoppelde vergelijkingen zijn alleen analytisch oplosbaar als $\phi(t)$ langzaam verandert, zodat geldt:

$$\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right| \ll 3H(t) \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \wedge \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \ll V(\phi) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi V(\phi)}{3m_p^2}} \\ 3H(t) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{cases}$$

De 2-de DV beschrijft een langzaam afrollen van het veld naar het min. van V voor $\phi = 0$.

Als $\partial \phi / \partial t \neq 0$, dan is R als functie van ϕ te schrijven \rightarrow

$$\frac{d \ln R}{d\phi} = \frac{R^{-1}(t) dR/dt}{\partial \phi / \partial t} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \cdot \frac{3H(t)}{\partial V / \partial \phi} = -\frac{3H^2(t)}{\partial V / \partial \phi} = -3 \cdot \frac{8\pi V(\phi)}{3m_p^2 \partial V / \partial \phi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d \ln R}{d\phi} = -\frac{8}{m_p^2} \cdot \frac{V(\phi)}{\partial V / \partial \phi} \cdot \frac{\phi}{\phi}$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial \ln \phi} = \frac{\partial \ln V}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \ln \phi} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi \rightarrow \frac{d \ln R}{d\phi} = -\left(\frac{\partial \ln V}{\partial \ln \phi} \right)^{-1} \frac{8\pi \phi}{m_p^2}$$

Stel: $V(\phi) = A\phi^{2n} | n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow \frac{\partial \ln V}{\partial \ln \phi} = \frac{1}{A\phi^{2n}} A \cdot 2n\phi^{2n-1} = 2n \rightarrow$

$$\frac{d \ln R}{d\phi} = -\frac{8\pi \phi}{2nm_p^2} \rightarrow \ln R(\phi) = -\frac{2\pi \phi^2}{nm_p^2} + C' \rightarrow R(\phi) = C e^{2\pi \phi^2 / nm_p^2}$$

Stel: $|\phi_{t_p}| = \phi_0 \rightarrow R(\phi_0) = C e^{-2\pi \phi_0^2 / nm_p^2} \rightarrow C = R(\phi_0) e^{2\pi \phi_0^2 / nm_p^2} \rightarrow$

$$R(\phi) = R(\phi_0) e^{[2\pi(\phi_0^2 - \phi^2)] / nm_p^2}$$

Daar het veld gemiddeld gesproken naar het min. bij $\phi = 0$ beweegt, is $\phi^2(t) < \phi_0^2 \rightarrow R(\phi)$ neemt toe. Als het veld in het min. is aangekomen, dan geldt voor de inflatiefactor:

$$Z(\phi_0) = \frac{R(\phi = 0)}{R(\phi_0)} = e^{2\pi \phi_0^2 / nm_p^2}$$

Voor een grote inflatiefactor moet voor de beginwaarde ϕ_0 van de amplitude gelden:

$\phi_0 \gg \sqrt{n/2\pi m_p}$; de waarde van de amplitude wordt beperkt door de eis $V(\phi_0) \leq 2m_p^4$. Voor $n = 1$ en $n = 2$ zijn de bijbehorende potentialen van de vorm:

$$V(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 & (n = 1) \\ \frac{1}{4} \lambda \phi^4 & (n = 2) \end{cases}$$

Hierin is m een massa en λ een dimensiloze parameter. Daar $-\partial V / \partial \phi = -\lambda \phi^3$ niet-lineair is, heeft het veld een **zelfinteractie**.

Uit $V(\phi) \leq 2m_p^4$ volgt: $m^2 \phi^2 \leq 4m_p^4$ resp. $\lambda \phi^4 \leq 8m_p^4 \rightarrow$

$$\phi_0 \leq \phi_{max} = \begin{cases} \frac{2m_p^2}{m} & (n = 1) \\ \frac{2^{3/4} m_p}{\lambda^{1/4}} & (n = 2) \end{cases}$$

Uit de eis dat $\phi(t)$ langzaam verandert volgt voor de min. waarde van ϕ :

$$|\phi| \geq \phi_{min} = \begin{cases} \frac{m_p}{\sqrt{12\pi}} & (n = 1) \\ \frac{m_p}{\sqrt{3\pi}} & (n = 2) \end{cases}$$

Wil ϕ tusen ϕ_{min} en ϕ_{max} liggen, dan moet gelden: $m \ll m_p (n = 1)$ resp. $\lambda \ll 1 (n = 2)$. Als ϕ begint met een amplitude ϕ_0 dicht bij ϕ_{max} , dan geldt voor de max. waarde van Z :

$$Z_{max} = Z(\phi_{max}) = \begin{cases} e^{8\pi m_p^2/m^2} & (n = 1) \\ e^{\sqrt{8\pi^2/\lambda}} & (n = 2) \end{cases}$$

In de bellen die rond de Plancktijd ontstaan kan de amplitude van het scalarveld allerlei waarden aannemen in $0 \leq \phi_0 \leq \phi_{max}$. De bellen met $\phi \geq m_p$ ondergaan inflatie, waarbij Z groter is naarmate ϕ_0 groter is. Daar er rond t_p grote quantumfluctuaties voorkomen, zijn er altijd bellen met $\phi_0 \gg m_p$ die een grote inflatiefactor ondergaan (mits $V(\phi)$ de juiste eigenschappen bezit). Voor $m \approx 0,01m_P (N = 1)$ is $Z_{max} \approx 10^{100.000}$, en voor $\lambda \approx 10^{-4} (n = 2)$ is $Z_{max} \approx 10^{400}$.

Het huidige waarneembare heelal beslaat een minieme fractie van een bel. Daar κ gereduceerd is met een factor Z^2 , is het waarneembare heelal vrijwel vlak. Uit andere bellen met voldoende grote ϕ_0 zijn zusterheelallen ontstaan. Bellen met $\phi_0 \approx \phi_{max}$ nemen het grootste volume in en hebben de grootste kans om door ons bewoond te worden. Zusterheelallen liggen ver buiten onze waarnemingshorizon.

In een volume $V(t)$ bevinden zich op tijd t van elke deeltjessoort een aantal deeltjes $N_i = n_i(t)V(t)$, met $n_i(t)$ de dichtheid van deeltjessoort i . Als er door botsingen per volume-eenheid $P_i(t)$ deeltjes worden gecreëerd en $D_i(t)$ worden vernietigd, dan geldt:

$$\frac{dN_i}{dt} = \{P_i(t) - D_i(t)\}V(t) \rightarrow$$

$$\frac{d\{n_i(t)R^3(t)\}}{dt} = \{P_i(t) - D_i(t)\}R^3(t)$$

$$\frac{dn_i}{dt}R^3(t) + 3n_iR^2(t)\frac{dR}{dt} = \{P_i(t) - D_i(t)\}R^3(t) \Leftrightarrow \frac{dn_i}{dt} + \frac{3n_i}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} = P_i(t) - D_i(t) \rightarrow$$

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = -3H(t)n_i + P_i(t) - D_i(t)$$

Hierin is de 1-ste term in het rechterlid de verdunning van de deeltjesdichtheid t.g.v. de expansie van het heelal.

Voor N puntdeeltjes in een afgesloten constant volume V is de gemiddelde kinetische energie per deeltje dezelfde: $\overline{E}_k = W/N \approx T$; er is dan thermisch evenwicht. Voor het aantal deeltjes

$$dn_i \text{ met impuls tussen } p + dp \text{ geldt dan: } dn_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \cdot \frac{p^2 dp}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1}$$

Hierin is $E = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ en μ_i de **chemische potentiaal** die de concentratie van de verschillende deeltjessoorten bepaalt. Als $\mu_i \ll E, T$, dan is μ_i te verwaarlozen. Het plusteken geldt voor fermionen, het minteken voor bosonen.

Voor de **equilibriumdichtheid** $n_{eq}(T)$ geldt:

$$n_{eq}(T) = \int_0^\infty \frac{g_i}{2\pi^2} \cdot \frac{p^2 dp}{e^{E/t} \pm 1} = \begin{cases} \frac{1, 20g_i}{\pi^2} T^3 & (T \gg m_i) \\ \frac{g_i}{(2\pi)^{3/2}} T^3 \left(\frac{m_i}{T}\right)^{3/2} e^{-m_i/T} & (T \ll m_i) \end{cases}$$

Voor fotonen geldt $g_i = 2$ en $n_f(T) = \frac{1, 202g(T)}{\pi^2} T^3 \rightarrow$

$$\frac{n_{eq}(T)}{n_f(T)} = \begin{cases} \frac{1}{2} g_i \approx 1 & (T \gg m_i) \\ \approx \left(\frac{m_i}{T}\right)^{3/2} e^{-m_i/T} \ll 1 & (T \ll m_i) \end{cases}$$

Bij thermisch evenwicht en vast volume geldt het zgn. **Principe van gedetailleerd evenwicht**, d.w.z. $P_i(T) = D_i(T)$ en $n_i = n_{eq}(i, T)$ is constant:

$$P_i(T) = D_i(T) = \Gamma_i(T) n_{eq}(i, T)$$

Hierin is Γ_i de **rectiesnelheid** en wordt uitgedrukt in t^{-1} .

De **werkzame doorsnede** σ_{mn} wordt gedefinieerd als:

$$\sigma_{mn} = \pi b^2$$

Hierin is b de straal van een boloppervlak rond een deeltje waarbinnen een reactie tussen 2 deeltjes kan plaatsvinden.

Als v de snelheid van een bundel deeltjes met dichtheid n_i is t.o.v. een bundel antideeltjes met dichtheid \bar{n}_i , dan geldt voor de reactiesnelheid Γ_i^{ann} :

$$\Gamma_i^{ann} = \sigma_{mn} v \bar{n}_i$$

De **vrije weglengte** λ_{ann} wordt gedefinieerd als:

$$\lambda_{ann} = \frac{1}{\sigma_{mn} \bar{n}_i} = \frac{v}{\Gamma_i^{ann}}$$

Daar de temperatuur van het heelal daalt is het heelal in feite nooit in thermisch evenwicht. Als de produktie en vernietiging van deeltjes echter veel sneller verloopt dan de verdunning t.g.v. de expansie van het heelal, dan is $n_i \approx n_{eq}(i, T)$. Er moet dan gelden dat $3H(t)n_i \ll P_i(T) \approx D_i(T) = \Gamma_i(T)n_{eq}(i, T) \rightarrow$

$$\Gamma_i(T) \gg 3H(t)$$

Voor relativistische deeltjes geldt: $\lambda_i \approx c/\Gamma_i \rightarrow$

$$\lambda_i \ll \frac{c}{H(t)} = d_H$$

Er is thermisch evenwicht zolang het heelal ondoorzichtig is m.b.t. de betreffende interacties. De dichtheid van de deeltjes is dan gekoppeld aan de temperatuur van het heelal. T.g.v. de temperatuurdaling wordt het heelal ondoorzichtig en wordt $\lambda_i \geq d_H$. De deeltjes worden ontkoppeld van de thermische eigenschappen van de rest van het heelal. De ontkoppeling vindt plaats op een tijd t_0 en temperatuur T_0 waarvoor geldt:

$$\Gamma_i(T_0)t_H \approx \Gamma_i(T_0)t_0 \approx 1$$

Als de ontkoppeling plaats vindt bij $T_0 \gg m_i$, dan is het aantal deeltjes vrijwel gelijk aan het aantal fotonen. Daar hun dichtheid t.g.v. de expansie van het heelal afneemt met $R^{-3}(T)$ - hun afname t.g.v. annihilatie is verwaarloosbaar vanwege hun zwakke interactie - is de relatieve dichtheid van de ontkoppelde deeltjes t.o.v. de fotonen *ingevroren*:

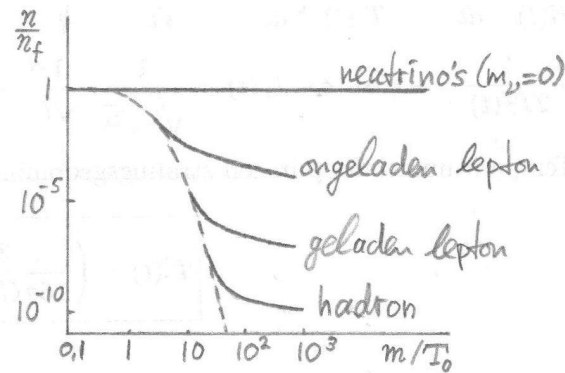
$$\frac{n_i(t)}{n_f} = \text{const.} \approx 1$$

Deeltjes die ontkoppelen bij $T_0 \ll m_i$ hebben i.h.a. een sterke wisselwerking met andere deeltjes. Daar de kinetische energie per deeltje kleiner is dan m_i worden er geen deeltjes meer gecreëerd; echter er vindt nog wel annihilatie plaats, totdat $\Gamma^{ann} \leq 3H(t)$ en geldt:

$$\frac{n_i(t)}{n_f} \approx \left(\frac{m_i}{T_0}\right)^{3/2} \frac{e^{-(m_i/T_0)}}{1 + \alpha_{ann}} \ll 1$$

Hierin is $(1 + \alpha_{ann})^{-1}$ de fractie deeltjes die na annihilatie overblijft.

Het moment van de ontkoppeling van een deeltje wordt bepaald door de sterkte van de wisselwerking van het deeltje met andere deeltjes, welke weer evenredig is met σ , die weer evenredig is met $(g^2/\hbar c)^2 = (\text{kop. const.})^2$. Neutrale leptonen ontkoppelen dus het eerst, gevolgd door geladen leptonen en als laatste de hadronen.



Het ontstaan en de evolutie van het heelal is thans te beschrijven vanaf ongeveer 10^{-43} s vanaf de Oerknal. De eerste 10^{-43} s vereisen een quantumtheorie van de zwaartekracht. Gedurende deze tijd zijn zowel de ruimte als de tijd waarschijnlijk niet langer duidelijk gedefinieerd.

I. Plancktijd: $t \approx 10^{-43}$ s $\wedge T \approx 10^{32}$ K

Quantumzwaartekracht; alle krachten zijn verenigd. Combinaties van de const. van Planck, de gravitatieconst. en de lichtsnelheid geven een aantal Planckuitdrukkingen, t.w.:

Plancktijd:	$t_p = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} \approx 10^{-43}\text{s}$
Plancklengte:	$L_p = ct_p \approx 10^{-33}\text{cm}$
Planckmassa:	$M_p = \frac{\hbar}{L_p c} \approx 10^{-5}\text{gr}$
Planckenergie:	$E_p = M_p c^2 \approx 10^{19}\text{GeV}$
Plancktemperatuur:	$T_p = \frac{E_p}{k} \approx 10^{23}\text{K}$

IIa. Chaotische inflatietijdperk: $t \geq 10^{-43}\text{s} \wedge T \leq 10^{32}\text{K}$

III. GUT tijdperk: $10^{-43}\text{s} < t < 10^{-34}\text{s} \wedge 10^{32}\text{K} > T > 10^{27}\text{K}$

Het heelal is gevuld met straling $\rightarrow \rho \propto R^{-4}(t)$; alle deeltjes zijn extreem relativistisch.

IIb. Inflatietijdperk: $10^{-34}\text{s} < t < 10^{-32}\text{s} \wedge T \approx 10^{27}\text{K}$

IV. Quark-Gluonplasma tijdperk: $10^{-32}\text{s} < t < 10^{-5}\text{s} \wedge 10^{27}\text{K} > T > 10^{13}\text{K}$

Het heelal is vlak en heeft aan het begin een temperatuur van ongeveer 10^{27}K . Voor de stralingsenergiedichtheid geldt: $e_r = \rho_r c^2 = \frac{1}{2}g(T)a_r T_r^4(t)$

Het heelal is **stralingsgedomineerd**.

Substitutie van $\rho_r = g(T)a_r T_r^4(t)/2c^2$ en $k = 0$ in de Friedmannvergelijking geeft:

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{4\pi G g(T) a_r}{3c^2} T_r^2(t)}$$

$$T_r(t) = T_r(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)} \Leftrightarrow T_r(t)R_r(t) = T_r(t_0)R_r(t_0) \rightarrow R(t) \frac{dT_r}{dt} + T_r(t) \frac{dR}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{T_r(t)} \cdot \frac{dT_r}{dt} \rightarrow \frac{dT_r}{dt} = -\sqrt{\frac{4\pi G g(T) a_r}{3c^2} T_r^3(t)} \Leftrightarrow \frac{dT_r}{T_r^3(t)} = -\sqrt{\alpha} dt$$

$$-\frac{1}{2T_r^2(t)} = -\sqrt{\alpha} t \Leftrightarrow T_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\alpha}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow$$

Temperatuursverloop in een stralingsgedomineerd heelal:

$$T_r(t) = \left(\frac{3c^2}{16\pi G g(T) a_r}\right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}}$$

Substitutie van de waarden van de constanten geeft:

$$T_r(t) \approx \frac{2.10^{10}}{t^{1/2}}$$

Substitutie van $T_r(t)$ in $T_r(t) = T_r(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t)}$ geeft voor $R(t)$:

$$R(t) = R(t_0) T_r(t_0) \left(\frac{32\pi G a_r}{3c^2}\right)^{1/4} t^{1/2}$$

Aan het begin van het stralingsgedomineerde tijdperk is er thermisch evenwicht, d.w.z. de concentratie van alle deeltjes wordt alleen bepaald door de temperatuur, ofwel door kT_r/mc^2 . Daar de massa van een deeltje en zijn antideeltje dezelfde is, is het aantal deeltjes en antideeltjes ook gelijk. Dat blijft zo totdat $kT_r/mc^2 \leq 1$, als de energie t.g.v. de warmtebeweging ($\approx kT_r$) te klein is om een deeltje met massa m te produceren.

In de GUT vaan de sterke- en elektrozwakke wisselwerking komen zgn. instabiele X -bosonen voor met een massa van ongeveer $2 \cdot 10^{-13} \text{kg}$, hetgeen overeen komt met een rustenergie van ongeveer 10^{14}GeV . Rond $t = 10^{-34} \text{s}$ stopt de produktie van X - en \bar{X} -bosonen, waarna ze vervallen via 2 mogelijke kanalen:

X -boson $\rightarrow \bar{q}\bar{q}$ -paar (waarschijnlijkheid f_1) of \bar{X} -boson $\rightarrow ql$ -paar (waarschijnlijkheid f_2)

\bar{X} -boson $\rightarrow qq$ -paar (waarschijnlijkheid \bar{f}_1) of X -boson $\rightarrow \bar{q}\bar{l}$ -paar (waarschijnlijkheid \bar{f}_2)

Voor de totale vervalrequentie f geldt: $f = f_1 + f_2 = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$

De verdeling over de kanalen is echter niet gelijk: $f_1 \neq \bar{f}_1$ en $f_2 \neq \bar{f}_2$

Het blijkt dat als $\bar{f}_1 > f_1$, er meer quarks en leptonen dan antiquarks en antileptonen geproduceerd zullen worden. Hierbij is het voldoende als $\bar{f}_1 - f_1 \approx 10^{-7} f$.

De quarks en leptonen vormen samen met de ijkbosonen de inhoud van het heelal. Daar de koppingsconstante van de sterke wisselwerking afneemt met toenemende energie konden de quarks vroeger vrij bewegen, daar de sterke wisselwerking te zwak was om de afstotende Coulombkracht tussen gelijke ladingen te overwinnen. Als echter de temperatuur op $t \approx 10^{-5} \text{s}$ gedaald is tot ongeveer 10^{13}K , wint de sterke wisselwerking het en ‘‘condenseren’’ alle quarks (en gluonen) tot hadronen: het hadronplasma tijdperk vangt aan.

V. Hadronplasma tijdperk: $10^{-5} \text{s} < t < 3000 \text{j} \wedge 10^{13} \text{K} > T > 4000 \text{K}$

Het heelal is nog steeds stralingsgedomineerd.

a. $t \leq 10^{-5} \text{s}$ ($\equiv T \leq 10^{13} \text{K}$): protonen en antiprotonen annihilieren elkaar (overschot van protonen blijft over).

b. $t \approx 10^{-2} \text{s}$ ($\equiv T \leq 10^{11} \text{K}$): neutrino's ontkoppelen, d.w.z. de afstand die een neutrino aflegt voordat het weer met een elektron of positron botst is ongeveer gelijk aan de horizonafstand, zodat het heelal transparant is geworden voor neutrino's (er vindt geen informatie-uitwisseling meer plaats tussen neutrino's en andere deeltjes).

c. $t \geq 1 \text{s}$ ($\equiv T \leq 10^{10} \text{K}$): elektronen en positronen annihilieren elkaar (overschot aan elektronen blijft over).

d. $1 \text{s} < t < 10^3 \text{s}$ ($\equiv 10^{10} \text{K} > T > 10^8 \text{K}$): voorwereldlijke nucleosynthese, een aantal lichte elementen wordt gevormd, o.a. Li, Be, B en C.

e. $t \approx 10^{12} \text{s}$ ($\equiv T \approx 4000 \text{K}$): de **3K-achtergrondstraling** ontstaat, het stralingsgedomineerde tijdperk eindigt.

Bij een temperatuur van 4000K vindt recombinatie plaats van atoomkernen en elektronen, waardoor het heelal doorzichtig wordt (vòòr deze tijd worden de fotonen zeer efficiënt door elektronen verstrooid (Thomsonverstrooiing)). De fotonen ontkoppelen dus en vormen de 3K-achtergrondstraling. Daar de energiedichtheid van straling evenredig is met $R^{-4}(t)$ en die van niet-relativistische deeltjes met $R^{-3}(t)$, gaat de energie van materie overheersen: het huidige materiegedomineerde heelal (de materiedichtheid is ongeveer 1000 keer hoger dan de stralingsdichtheid).

Daar $p \approx 0$ is geworden, neemt de zwaartekracht iets af waardoor de expansiesnelheid van het heelal iets toeneemt.

f. $t - t_e \geq 10^{12} \text{s}$ ($\equiv T < 4000 \text{K}$): fluctuaties in de materiedichtheid geven aanleiding tot vorming van sterrenstelsels, clusters, sterren en planeten.

Er zijn 3 processen die de dichtheidsfluctuaties beïnvloeden:

1. **gravitatie**, die de fluctuatie versterkt.
2. **kosmische vloeistofdruk**, die de fluctuatie doet oscilleren als een geluidsgolf.
3. **foton viscositeit**, die de fluctuatie d.m.v. demping doet verdwijnen t.g.v. botsingen tussen fotonen en materie (na t_e stopt dit vanwege de recombinitie).

Als de massa M van de fluctuatie groter is dan de zgn. **Jeansmassa** M_j , dan is de zelfgravitatie van de massa groter dan de kosmische vloeistofdruk en zal de massa verder inkrimpen. Als r de straal van de massafluctuatie is en v de geluidssnelheid, dan geldt dat als r/v groter is dan de karakteristieke tijd t_k waarin de fluctuatie inkrimpt t.g.v. de zelfgravitatie, de fluctuatie zàl inkrimpen. Voor t_k geldt: $t_k = (G\rho_{tot})^{-1/2} \rightarrow$ voorwaarde voor contractie: $(r/v) > (G\rho_{tot})^{-1/2}$

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \rightarrow r = \frac{(3M)^{1/3}}{(4\pi\rho)^{1/3}} \rightarrow \frac{3M}{4\pi\rho} = \frac{v^3}{(G\rho_{tot})^{3/2}} \rightarrow M_j = \frac{4\pi\rho v^3}{3(G\rho_{tot})^{3/2}}, \text{ met } \rho \text{ de massadichtheid.}$$

Als p de gasdruk is, dan geldt: $v = \sqrt{dp/d\rho_{tot}}$

Tijdens het stralingsgedomineerd tijdperk geldt: $\rho_{tot} \approx \rho_r = a_r T_r^4(t)/c^2$ als $g(T) = 2$

Voor de toestandsvergelijking geldt: $p = \frac{1}{3}\rho_r c^2 \rightarrow v = c/\sqrt{3}$

$$\text{Substitutie in } M_j \text{ geeft: } M_j = \frac{4\pi\rho c^3}{3(3Ga_r T_r^4(t)/c^2)^{3/2}} \approx \frac{\rho c^6}{(Ga_r)^{3/2} T_r^6(t)}$$

$$\rho(t) = \rho(t_e) \frac{R^3(t_e)}{R^3(t)} = \rho_r(t_e) \frac{T_r^3(t)}{T_r^3(t_e)} = \frac{a_r T_r(t_e) T_r^3(t)}{c^2} \rightarrow$$

$$M_j = \frac{c^4 T_r(t_e)}{G^{3/2} a_r^{1/2} T_r^3(t)}$$

$$M_{j,t=t_e} = c^4/G^{3/2} a_r^{1/2} T_r^2(t_e) \approx 3.10^{18} M_{zon} \gg M_{sterrenstelsel}$$

Tijdens het materiegedomineerde tijdperk geldt: $\rho_r \approx 0 \rightarrow \rho_{tot} \approx \rho$

De materie kan worden opgevat als een ideaal 1-atomig waterstofgas met soortelijke warmteverhouding van $\gamma = 5/3$ en toestandsvergelijking $p = \rho k T_m / m_H$, met m_H de massa van 1 waterstofatoom $\rightarrow v = \sqrt{k T_m / m_H} \rightarrow$

$$M_j = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{k T_m}{G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}(t)}$$

$$T_m V^{\gamma-1} = \text{constant} \Leftrightarrow \frac{T_m}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{T_m}{\rho^{3/2}} = \frac{T_r(t_e)}{\rho^{3/2}(t_e)} \quad (t-t_e \Rightarrow T_m = T_r) \Leftrightarrow T_m = T_r(t_e) \left\{ \frac{\rho}{\rho(t_e)} \right\}^{2/3} =$$

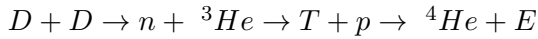
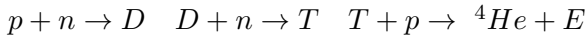
$$T_r(t_e) \left\{ \frac{\rho(t_e) T_r^3(t)}{T_r^3(t_e) \rho(t_e)} \right\}^{2/3} \frac{T_r^2(t)}{T_r(t_e)} \rightarrow$$

$$M_j = \frac{4\pi}{3} \left\{ \frac{k T_r(t)}{G m_H} \right\}^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}(t)}$$

$$M_{j,t=t_e} \approx 3 \cdot 10^5 M_{zon} \ll M_{sterrenstelsel}$$

Als de demping t.g.v. de foton viscositeit in rekening wordt gebracht, dan blijkt de minimale ongedempte massa op $t = t_e$ ongeveer gelijk aan $10^{12} M_{zon} \approx M_{sterrenstelsel}$

Aannemende dat er vlak na de Oerknal alleen waterstof was, is de zgn. **heliumsynthese** mogelijk via de reacties:



Deuterium is essentieel voor 4He -vorming; als echter de thermische energie kT_r van de oerfotonen groter is dan de bindingsenergie van D ($\approx 2.2\text{MeV}$), dan zullen D-kernen snel dissociëren. Hieruit volgt dat 4He niet gevormd kan worden totdat $T_r < 2.2\text{MeV}/k \approx 10^{10}\text{K}$,

ofwel na een tijd t die volgt uit $T_r(t) = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a_r} \right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}}$, ofwel $t = \left(\frac{3}{32\pi G a_r} \right)^{1/2} \frac{c}{T_r^2(t)} \approx 2\text{s}$.

Vòòr dat tijdstip was het heelal gevuld met elektronen en positronen (rustmassa-energie $\approx 0,5\text{MeV}$). De meeste 4He werd gevormd bij een $T_r \approx 10^9\text{K}$, hetgeen na een $t = 200\text{s}$ plaatsvond. Hieruit volgt een 4He -abundantie van 27%.

Zwaardere elementen kunnen vrijwel niet in de Oerknal gevormd zijn, daar er geen stabiele “intermediaire” kernen zijn met atoomgewicht 5 en 8.

Muonen hebben een rustmassa-energie van ongeveer 10^2MeV . Hieruit volgt dat de vorming van μ^\pm -paren plaatsvond bij een $T_r \approx 10^{12}\text{K}$, ofwel na $t \approx 2 \cdot 10^{-4}\text{s}$. Protonen en antiprotonen hebben een rustmassa-energie van ongeveer 10^3MeV ; hun vorming vond plaats bij een $T_r \approx 10^{13}\text{K}$, ofwel na $t \approx 2 \cdot 10^{-6}\text{s}$.

Momenteel geldt voor de verhouding fotonen tot nucleonen dat deze ongeveer $10^{10} : 1$ bedraagt. Bij een geheel symmetrische Oerknal, d.w.z. bij gelijke aantallen deeltjes en antideeltjes, zou deze verhouding ongeveer $10^{18} : 1$ moeten zijn. Hieruit volgt dat in het begin de verhouding deeltjes antideeltjes ongeveer $10^8 : 1$ moet zijn geweest.

Voor $t = 0$ voorspelt de ART een **singulariteit**; voor $k = 1$ betekent dit dat en eindige hoeveelheid materie en straling in een eigen volume nul zit (“punt”). Dit “punt” omvat alle ruimte, er is geen “buiten”. Voor $k = 0, -1$ vindt zich een eindige hoeveelheid materie en straling in een oneindig eigen volume, d.w.z. de singulariteit is “overall”. De singulariteit kan eventueel voorkomen worden door quantumeffecten die op tijd t_q optreden.

Daar in het stralingsgedomineerde tijdvak geldt: $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{(1/2)At^{-1/2}}{At^{1/2}} = \frac{1}{2t}$, en dit nie groter kan zijn dan de frequentie van de golflengte van een elementair deeltje waarvoor

geldt: $\nu = \frac{kT_r(t)}{\hbar} = \frac{k}{\hbar} \left(\frac{3c^2}{32\pi G a_r} \right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}}$, geldt voor het tijdstip t_q waarvòòr quantumeffecten overheersen:

$$\frac{k}{\hbar} \left(\frac{3c^2}{32\pi G a_r} \right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{2t_q} \rightarrow t_q = \frac{\hbar^2}{4k^2} \left(\frac{32\pi G a_r}{3c^2} \right)^{1/2} \rightarrow$$

$$t_q = \left(\frac{\pi^2 \hbar G}{45c^5} \right)^{1/2}$$

Substitutie van de numerieke waarden geeft: $t_q \approx 10^{-43}$ s; hieruit volgt een temperatuur van $T_{r,q} \approx 5.10^{31}$ K. Het heelal is dan geëxpandeerd vanuit een eindig volume met schaalfactor:

$$R(t_q) = \frac{R(t_0)T_r(t_0)}{T_r(t_q)} \approx 10^{-5}\text{m}.$$

Als de ruimte rond een pm M in O isotroop is, dan is de ruimte bepaald door de intrinsieke kromming van elk hyperoppervlak (r, ν, ϕ) met oppervlakte $4\pi r^2$: $K = K(r)$

Op grote afstand geldt: $\lim_{r \rightarrow \infty} K(r) = 0 \rightarrow K(r) \propto r^{-n} \mid n \in \mathbb{N}$

Tevens is $K(r) \propto M$ en eventueel $K(r) \propto G^l c^m \mid l, m \in \mathbb{N} \rightarrow K(r) = qMG^l c^m r^{-n}$, met q de evenredigheidsconstante. Een dimensiebeschouwing levert: $l = 1, m = -2$ en $n = 3$; als $q = -1$ genomen wordt, dan volgt hieruit:

$$K(r) = -\frac{GM}{c^2 r^3}$$

$K(r)$ beschrijft de *statische* ruimtelijke kromming rond een geïsoleerde massa.

Voor het lijnelement rond M geldt: $ds^2 = e(r)dt^2 - \{f(r)dr^2 + r^2 d\nu^2 + r^2 \sin^2 \nu d\phi^2\}/c^2$

Hierin zijn $e(r)$ en $f(r)$ functies die de kromming van de ruimte en tijddilatatie (t.g.v. het gravitatieveld) bepalen, met $\lim_{r \rightarrow \infty} e(r) = 1$ en $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$.

Uit de veldvergelijkingen volgt: $e(r) = 1 - (2GM/c^2 r)$

$$\text{Stel: } d\nu = dt = 0 \wedge \nu = \frac{1}{2}\pi \rightarrow K(r) = \frac{df(r)/dr}{2r f^2(r)} = -\frac{GM}{c^2 r^3} \rightarrow \frac{df}{f^2(r)} = -\frac{2GM}{c^2} \cdot \frac{dr}{r^2} \rightarrow$$

$$f(r) = \frac{1}{C - (2GM/c^2 r)}; K(\infty) = 0 \Rightarrow f(r) = 1 \rightarrow C = 1 \rightarrow f(r) = \frac{1}{1 - (2GM/c^2 r)} \rightarrow$$

Schwarzschildmetriek voor een niet-roterende massa M :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{dr^2}{1 - (2GM/c^2 r)} + r^2 d\nu^2 + r^2 \sin^2 \nu d\phi^2 \right\}$$

Hieruit volgt voor de bijbehorende metrische tensor:

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 - (2GM/c^2 r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (2GM/c^2 r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \nu / c^2 \end{pmatrix}$$

De **Schwarzschildstraal** r_s wordt gedefinieerd als:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Voor $r = r_s$ worden g_{11} , g_{22} en g_{33} oneindig in de Schwarzschildmetriek; dit is echter een **coördinatensingulariteit**. De kromming bij $r = r_s$ is niet singulier, maar verloopt regelmatig van $r > r_s$ naar $r < r_s$. Het gebruik van zgn. **Kruskal-Szekerescoördinaten** heft deze singulariteit op. Het gebied binnen r_s heet een **zwart gat**, met in het centrum ($r = 0$) een singulariteit waar de kromming oneindig groot is.

Een roterende massa sleept de inertiaalstelsels rond de massa met zich mee. Voor de hoeksnelheid ω van de meegesleepte inertiaalstelsels (t.o.v. de sterren) op afstand r van de massa met hoeksnelheid J geldt:

$$\omega = \frac{kGJ}{c^2 r^3}$$

Hierin is k een dimensieloze constante.

Voor de aarde is $\omega \approx 0,1''/\text{jaar}$; het vlak van een Foucaultslinger is dus niet absoluut vast t.o.v. de sterren (periode $\pm 10^7$ jaar).

Bij een zwart gat is ω veel groter. Voor een massa die op het moment dat deze door r_s implodeert een hoeksnelheid Ω had, geldt:

$$\omega = \frac{\Omega r_s^3}{5r^3}$$

De voorwaarde opdat bij een imploderende massa M met hoeksnelheid J een zwart gat wordt gevormd, is:

$$J < \frac{GM^2}{c}$$

Voor de Schwarzschildstraal geldt dan:

$$r_s = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2}$$

Er bevindt zich nu buiten r_s een 2-de afgeplat oppervlak, de zgn. **statische limiet**, met als straal:

$$r_{stat} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2 \cos^2 \theta}$$

Hierin is θ de poolhoek van een externe waarnemer. Het gebied tussen r_s en r_{stat} heet de **ergosfeer**, hierin kan een deeltje niet in rust zijn, d.w.z. het wordt gedwongen om rond te bewegen (de radiale snelheid kan wel nul zijn, maar de hoeksnelheid niet).

Voor de eigen oppervlakte A van een zwart gat geldt:

$$A = 4\pi \left\{ r_s^2 + \left(\frac{J}{Mc}\right)^2 \right\} = \frac{8\pi GM}{c^2} \left\{ \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2} \right\}$$

Als M kleiner wordt, dan wordt A kleiner, echter J wordt ook kleiner en wel zo, dat netto A niet kleiner wordt. Hieruit volgt dat **naakte singulariteiten** niet bestaan.

Een zwart gat wordt geheel gekarakteriseerd door (M, J, Q) van het oorspronkelijke lichaam.

De zgn. **Veel-werelden interpretatie** van de quantummechanica van Everett is gebaseerd op de stelling dat bij een meting de golffunctie *niet* ineenstort.

Om de 2 mogelijke spins $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ van een elektron te kunnen vastleggen moet een meetapparaat min. 2 geheugentoestanden, $|u\rangle$ en $|d\rangle$ bezitten, alsmede een toestand $|n\rangle$ voor als er nog geen meting heeft plaatsgevonden. Elke toestand $|\psi\rangle$ van de elektronspin is te schrijven als een lineaire superpositie van $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ van de vorm $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Dit geldt ook voor

het meetapparaat: $|\Phi\rangle = p|u\rangle + q|d\rangle + r|n\rangle$

De algemene toestand $|U\rangle$ van het heelal, zijnde de som van alle systemen en alle meetapparaten, is een som van tensorprodukten van de basistoestanden van het systeem en de basistoestanden van het meetapparaat: $|U\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle |\Phi_i\rangle$

Een meting komt nu overeen met een verandering van de toestand van het heelal:

$$M|U_{voor}\rangle = |U_{na}\rangle$$

Hierin is M een lineaire operator en vertegenwoordigt een zgn. Von Neumann meting, ofwel een meting die geen effect heeft op het systeem als het systeem in een eigentoestand van de observabele verkeert gemeten door het desbetreffende meetapparaat: $M|\uparrow\rangle|n\rangle = |\uparrow\rangle|u\rangle \wedge M|\downarrow\rangle|n\rangle = |\downarrow\rangle|d\rangle$

Voor een Von Neumann meting corresponderend met een operator M op de toestand $|U_{voor}\rangle = |\psi\rangle|\Phi\rangle$, met $|\Phi\rangle = |n\rangle$ geldt:

$$M|U_{voor}\rangle = M(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)|n\rangle = M(a|\uparrow\rangle|n\rangle) + M(b|\downarrow\rangle|n\rangle)$$

$$M|U_{voor}\rangle = a|\uparrow\rangle|u\rangle + b|\downarrow\rangle|d\rangle = |U_{na}\rangle$$

Hierbij correspondeert zowel de term $a|\uparrow\rangle|u\rangle$ als $b|\downarrow\rangle|d\rangle$ met een werkelijke fysische toestand, hetgeen betekent dat het heelal a.h.w. in 2 werelden is gesplitst, tw. een wereld waarin het elektron spin op heeft en als zodanig wordt gemeten en een wereld waarin het spin neer heeft en als zodanig wordt gemeten. (Dit houdt in feite in dat een quantummeting alleen maar een unieke correlatie legt tussen toestanden van het systeem dat gemeten wordt en toestanden van het meetapparaat. De VWI van deze meting is dat er slechts 1 heelal is maar dat het meetapparaat splijt; dit verandert nl. van de toestand $|n\rangle$ naar $|u\rangle$ of $|d\rangle$ of beide. Dit blijkt ook uit substitutie van dat deel van het heelal dat niet met het meetapparaat in wisselwerking treedt:

$$M|U_{voor}\rangle = M(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)|n\rangle|U_{rest}\rangle = a|\uparrow\rangle|u\rangle|U_{rest}\rangle + b|\downarrow\rangle|d\rangle|U_{rest}\rangle \Leftrightarrow$$

$$M|U_{voor}\rangle = (a|\uparrow\rangle|u\rangle + b|\downarrow\rangle|d\rangle)|U_{rest}\rangle$$

Om de evolutie van een systeem in de tijd te kunnen meten moet een meetapparaat een aantal $-n-$ opeenvolgende geheugen opslagplaatsen in zijn toestandsrepresentatie $|E\rangle$ bezitten, waarbij $|E\rangle$ te schrijven is als een lineaire superpositie van de vorm $|a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$. Hierin kan elke a_j de waarde u , d of n aannemen. De j -de meting van de toestand van het systeem correspondeert met de operator M_j waarvoor geldt:

$$M_j|\uparrow\rangle|a_1, \dots, a_j, \dots, a_n\rangle = |\uparrow\rangle|a_1, \dots, u, \dots, a_n\rangle$$

$$M_j|\downarrow\rangle|a_1, \dots, a_j, \dots, a_n\rangle = |\downarrow\rangle|a_1, \dots, d, \dots, a_n\rangle$$

De begintoestand van het meetapparaat is $|n, n, \dots, n\rangle$.

De tijdevolutie wordt voortgebracht door de unitaire tijdoperator $T(t)$ die alleen op het systeem werkt. Als $|\Phi\rangle$ de toestand van het meetapparaat voorstelt, dan geldt voor het effect van $T(t)$ op de basistoestanden van het systeem:

$$T(t)|\uparrow\rangle|\Phi\rangle = (a_{11}(t)|\uparrow\rangle + a_{12}(t)|\downarrow\rangle)|\Phi\rangle$$

$$T(t)|\downarrow\rangle|\Phi\rangle = (a_{11}(t)|\uparrow\rangle + a_{12}(t)|\downarrow\rangle)|\Phi\rangle$$

Voor een reeks metingen op $t = 1, 2, 3, \dots$ geldt dan:

$$M_n T(1) M_{n-1} T(1) \dots M_2 T(1) M_1 |\psi\rangle |n, n, \dots, n\rangle =$$

$$M_n T(1) M_{n-1} T(1) \dots M_2 T(1) [M_1(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)] |n, n, \dots, n\rangle =$$

$$M_n T(1) M_{n-1} T(1) \dots M_2 T(1) (a|\uparrow\rangle|u, n, \dots, n\rangle + b|\downarrow\rangle|d, n, \dots, n\rangle) =$$

$$M_n T(1) M_{n-1} T(1) \dots M_2 T(1) (a|\downarrow\rangle|u, n, \dots, n\rangle + b|\uparrow\rangle|d, n, \dots, n\rangle)$$

$$M_n T(1) M_{n-1} T(1) \dots M_3 T(1) (a|\downarrow\rangle|u, d, n, \dots\rangle + b|\uparrow\rangle|d, u, n, \dots\rangle)$$

De eerste meting M_1 van de toestand van het systeem splijt het meetapparaat in een wereld

waarin de spin oorspronkelijk op is en in een wereld waarin deze oorspronkelijk neer is. Daarna ontwikkelt elke wereld zich alsof de spin van het gehele systeem oorspronkelijk op resp. neer was.

Voor de bepaling van de constanten a en b (of a_{ij}) is een serie metingen noodzakelijk op een ensemble van identieke systemen. De beginensembletoestand is te schrijven als:

$$|u_{voor}\rangle = (|\psi\rangle)^m |n, n, \dots, n\rangle$$

Hierin is m het aantal toestanden in de meetapparaat geheugentoeestand $|n, n, \dots, n\rangle$ en registreert de k -de geheugentoeestand d.m.v. de meetapparaat operator M_k de gemeten toestand van het k -de systeem in $(|\psi\rangle)^m$.

Voor m toestandsmetingen op het ensemble $(|\psi\rangle)^m$ geldt:

$$M_m M_{m-1} \dots M_2 [M_1(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)] (|\psi\rangle)^{m-1} |n, n, \dots, n\rangle \\ \sum a^j b^{m-j} (|\uparrow\rangle)^j (|\downarrow\rangle)^{m-j} |s_1, s_2, \dots, s_m\rangle$$

Hierin is s_i gelijk aan u of d en loopt de som over alle mogelijke permutaties van u 's en d 's in de geheugen grondtoestand $|s_1, s_2, \dots, s_m\rangle$

De operator $M_m \dots M_1$ splitst het meetapparaat in 2^m werelden. Als a en b gedefinieerd worden als $a = \langle\psi| \uparrow\rangle$ en $b = \langle\psi| \downarrow\rangle$, dan nadert de relatieve frequentie van de u 's naar $|a|^2/(|a|^2 + |b|^2)$ en van de d 's naar $|b|^2/(|a|^2 + |b|^2)$ als $m \rightarrow \infty$ nadert. Bij een normalisatievoorwaarde $|a|^2 + |b|^2 = 1$ stelt $|a|^2$ resp. $|b|^2$ de waarschijnlijkheid voor om de toestand $|\psi\rangle$ te meten in de toestand $|\uparrow\rangle$ resp. $|\downarrow\rangle$.

Bij zgn. golfpaketspeiding treedt in de VWI eveneens splitsing op. Voor een systeem met 4 vrijheidsgraden gegeven door de grondtoestanden $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|\rightarrow\rangle$ en $|\leftarrow\rangle$ geldt dat de k -de meting corresponderend met de operator M_k de k -de geheugentoeestand van het meetapparaat verandert van $|n\rangle$ in u , d , r of l , afhankelijk of de toestand van het systeem resp. $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|\rightarrow\rangle$ of $|\leftarrow\rangle$ is.

Voor de werking van $T(t)$ op de grondtoestanden van het systeem geldt:

$$T(1) |\uparrow\rangle = a_{\uparrow\rightarrow} |\rightarrow\rangle + a_{\uparrow\downarrow} |\downarrow\rangle \\ T(1) |\downarrow\rangle = a_{\downarrow\leftarrow} |\leftarrow\rangle + a_{\downarrow\uparrow} |\uparrow\rangle \\ T(1) |\leftarrow\rangle = a_{\leftarrow\uparrow} |\uparrow\rangle + a_{\leftarrow\rightarrow} |\rightarrow\rangle \\ T(1) |\rightarrow\rangle = a_{\rightarrow\downarrow} |\downarrow\rangle + a_{\rightarrow\leftarrow} |\leftarrow\rangle$$

Als geldt dat $|a_{ij}|^2 \gg |a_{ik}|^2$ met $j = i + 1$ en $k = i + 2$, waarbij $i + n$ overeenkomt met een rotatie van de pijl die de grondtoestand kenmerkt met de klok mee over n keer $\frac{1}{2}\pi$ vanuit de i -de pijlpositie, dan zal het grootste deel van het golfpakket dat zich oorspronkelijk op een bepaalde positie bevindt getransformeerd worden over $\frac{1}{2}\pi$ met de klok mee, waarbij een kleine spreiding optreedt naar de positie op π .

Elke meting splitst elke vorige wereld in twee, d.w.z. het aantal takken van het heelal verdubbelt met elke meting. Elke wereld wordt gekarakteriseerd door een bepaalde reeks van gemeten systeem grondtoestanden in het geheugen van het meetapparaat. Hierbij zijn sommige werelden veel waarschijnlijker dan andere, afhankelijk van de grootte van de bijbehorende a_{ij} 's.

Volgens de VWI stelt de golffunctie van het Heelal Ψ een verz. voor van vele heelallen, waarbij de tijdevolutie van Ψ gekoppeld is aan de straal R van het heelal. Voor stralingsgedomineerde gesloten Friedmannheelallen geldt dat als alle heelallen beginnen bij de singulariteit $R = 0$ als $\tau = 0$, dat dan het Heelal na 2 metingen in een groot aantal heehallen gesplitst is die alle even waarschijnlijk zijn. Ze bereiken hun max. straal bij $\tau = \frac{1}{2}\pi$ en eindigen in een singulariteit bij $\tau = \pi$.

In de VWI is het probleem van de specifieke beginvoorwaarden m.b.t. het ontstaan van ons

heelal en de vraag waarom het heelal er juist zo uit ziet zoals wij het waarnemen opgelost. Alle andere logisch mogelijke heelallen bestaan immers tegelijkertijd. Ook hoeft er nu geen collaps van de golffunctie plaats te vinden, die in de theorie van de quantumkosmologie uiterst problematisch is.

Ons heelal wordt gekenmerkt door een voldoende grote straal, groot genoeg om voldoende tijd te bezitten om leven te laten ontstaan en zich te ontwikkelen. Daar in principe elke heelalstraal mogelijk is, is het domein van $\Psi(R, \tau)$ gelijk aan $< 0, \infty|$. Voor een stralingsgedomineerd gesloten Friedmannheelal is de Heelalgolffunctie te schrijven als:

$$\Psi(R, \tau) = \left(\frac{3i}{4L_p \sin \tau} \right)^{1/2} e^{(3\pi/4i)(\cot \tau)(R/L_p)^2}$$

Hierin is L_p de Plancklengte. Bij $\tau = 0$ begint Ψ als een Deltafunctie en bij $\tau = \pi$ eindigt ze als een Deltafunctie, hetgeen betekent dat alle quantumheelallen net als de klassieke gesloten Friedmannheelallen in een singulariteit eindigen. Daar de golffunctiemodulus onafhankelijk is van R , is de waarschijnlijkheid om op een bepaald moment in een heelal te verkeren met straal R onafhankelijk van R , d.w.z. elk heelal is even waarschijnlijk.